gli esercizi contrassegnati con una stellina o piu' stelline si possono consegnare e sono alternativi all'esame se si raggiungo le 6 stelline. Persone diverse non possono consegnare lo stesso esercizio a meno che non l'abbiano fatto insieme e in quel caso si dividono il numero di stellette.

Gli esercizi contrassegnati con una U li considero particolarmente utile per seguire il corso. Svolgerli dovrebbe aiutare a capire quello che viene fatto a lezione. Anche se non sono cose fatte a lezione mi aspetto che all'esame uno sappia fare esercizi di questo tipo.

1. Gruppi e algebre di Lie

Sono state spiegate tre cose:

- come associare ad un gruppo di Lie una algebra di Lie;
- come è fatta l'algebra di Lie associata a $GL(n)$;
- come è fatta l'agebra di Lie associata ad un sottogruppo di $GL(n)$.

Il punto di vista adottato in questa spiegazione è più vicino al caso dei gruppi algebrici che al caso dei gruppi di Lie e lo potete ritrovare, per esempio nel libro di Springer "Linear algebraic groups", capitolo 4. In generale per la parte di teoria più classica sui gruppi algebrici questo libro mi sembra il migliore. Se uno invece è interessato ad un approccio più differenziale i possibili libri introduttivisono ancora di più, li conosco meno e non ce ne è uno che mi sento di consigliare su tutti gli altri. Vi dico quelli che ho studiato io. Il libro "The structure of Lie groups" di Hochschild, a prima vista può sembrare troppo vecchio stile, ma è un libro molto ben fatto e che va al nocciolo delle cose. Un libro molto più ampio e lungo che fa cose più raffinate ma che parte anche dalle cose di base è "Lie groups beyond an introduction" di Knapp. Infine un libro molto bello, che contiene un sacco di risultati utili, e che sceglie una via a metà tra un approccio differenziale e uno algebrico è il libro di Onishick e Vinberg "Lie groups and algebraic groups". Questo ultimo libro sviluppa tutta la teoria tramite una lista di esercizi.

2. Osservazioni sulle ipotesi di vari teoremi

Abbiamo fatto alcuni esercizi, mostrando alcuni controesempi o, a seconda dei casi, generalizzando alcuni risultati ottenuti a lezione su alcuni teoremi.

2.1. **Esercizio: Decomposizione di Jordan di un endomorfismo.** L'ipotesi finito dimensionale serve. Diciamo che un endomorfismo S di uno spazio vettoriale V su E è semisemplice se è diagonalizzabile sulla chiusura di E.

Allora il teorema di decomposizione di Jordan nella forma enunciata a lezione vale se E è perfetto.

2.2. **Esercizio.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\Bbbk$ e S un suo endomorfismo. Si dimostri che S è semisemplice se e solo se V è semisemplice come $\Bbbk[t]$-modulo dove t agisce come S.

2.3. **Esercizio: Teorema di Lie.** Servono tutte e tre le ipotesi: dimensione finita, caratteristica zero e algebricamente chiuso.

2.4. **Esercizio: L risolubile implica $[L, L]$ nilpotente.** Serve dimensione finita e caratteristica zero ma non algebricamente chiuso.

2.5. **Esercizio: criterio di Cartan.** Serve dimensione finita e caratteristica zero ma non algebricamente chiuso.

2.6. **Esercizio: L semisemplice se e solo se la forma di Killing è non degenere.** Serve dimensione finita e caratteristica zero ma non serve algebricamente chiuso.

3. Alcune osservazioni sulle rappresentazioni semisemplici

3.1. **Esercizio.** Sia V una rappresentazione irriducibile di dimensione al più numerabile di una algebra di Lie su $\mathbb{C}$. Allora
$$\mathrm{End}_L(V) = \mathbb{C}\, Id.$$

3.2. **Esercizio.** Sia V una rappresentazione di una algebra di Lie. Si dimostri che è semisemplice se e solo se per ogni U sottorappresentazione di V esiste una sottorappresentazione W di V tale che $V = U \oplus W$.

3.3. **Esercizio.** Data una rappresentazione V di una algebra di Lie L sia
$$V^L = \{v \in V \,:\, x \cdot v = 0 \text{ per ogni } x \in L\}.$$
Si dimostri che tutte le rappresentazioni finito dimensionali di una algebra di Lie L sono semisemplici se e solo per ogni rappresentazione finito dimensionale V di L esiste una sottorappresentazione U di V tale che $V = V^L \oplus U$.

Il risultato del seguente esercizio si chiama teorema di Jacobson ed è molto utile ed è, evidentemente, specifico per le algebre associative.

3.4. **Esercizio.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ e sia $A \subset \mathrm{End}_A(V)$ una sottoalgebra associativa. Se V è irriducibile come A-modulo. Allora $A = \mathrm{End}(V)$.

La dimostrazione meriterebbe almeno una stellina ma il risultato si trova dappertutto e alcuni già lo sanno.

4. Alcune osservazioni sulle rappresentazioni nel caso non semisemplice

4.1. **Rappresentazioni indecomponibili e teorema di Krull-Schmidt.** Una rappresentazione si dice indecomponibile se non si può scrivere nella forma $U \oplus V$ con U e V diverse da zero.

Se V è una rappresentazione di dimensione finita è evidente che si possa scrivere come una somma finita di rappresentazioni di dimensione finita. È meno evidente che gli addendi di tale somma sono univocamente determinati a meno di isomorfismo. Questo è il contenuto del teorema di Krull-Schmidt. Per la dimostrazione si può, per esempio vedere il libro di Pierce "Associative algebras" paragrafo 5.4, che fa questo un teorema in un contesto più generale e le ipotesi che mette sono in particolari banalmente verificate nel caso di rappresentazioni di dimensione finita.

Quindi, perlomeno per le rappresentazioni di dimensione finita (ma in realtà molto più in generale) classificare le rappresentazioni è equivalente a classificare le rappresentazioni indecomponibili.

4.1.1. *Rappresentazioni di* $\Bbbk\langle x, y\rangle$. Sia V un $\Bbbk$-spazio vettoriale. Dare una rappresentazione di $\Bbbk\langle x, y\rangle$ su V è come dare due endomorfismi lineari $A, B \in \mathrm{End}(V)$ una che dice come agisce x e l'altra che dice come agisce y. Le rappresentazioni definite dagli endomorfismi A, B e dagli endomorfismi C, D su V sono isomorfe se esiste $g \in GL(V)$ tale che $Ag = gC$ e $Bg = gD$. Quindi, equivalentemente le rappresentazioni di dimensione n di $\Bbbk\langle x, y\rangle$ sono equivalenti al quoziente
$$\mathsf{Mat}_{n\times n}(\Bbbk) \times \mathsf{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)/GL(n)$$
delle coppie di matrici $n \times n$ modulo l'azione aggiunta di $GL(n)$: $g \cdot (A, B) = (gAg^{-1}, gBg^{-1})$. Malgrado la somiglianza formale con la forma di Jordan, questo problema risulta molto complicato.

4.2. **Algebre "selvaggie".** (nella discussione che segue per semplicità ho preso come campo base $\mathbb{C}$ in realtà spesso l'ipotesi che uso è che il campo sia infinito)

Una $\mathbb{C}$-algebra si dice "selvaggia" se la sua categoria delle rappresentazioni di dimensione finita contiene una sottocategoria equivalente alla categoria delle rappresentazioni di dimensione finita dell'algebra associativa libera con due elementi che si indica con $\Bbbk\langle x, y\rangle$.

Definiamo meglio cosa vuol dire "contenere". Data una $\Bbbk$-algebra A sia Repf_A la categoria delle rappresentazioni finito dimensionali su $\mathbb{C}$. Diciamo che la categoria delle rappresentazioni di A contiene la categoria delle rappresentazioni di B se esite un funtore $\mathbb{C}$-lineare (questo vuol dire additivo e che a livello di morfismi è $\mathbb{C}$-lineare) $F : \mathrm{Repf}_B \longrightarrow \mathrm{Repf}_A$ tale che

(1) $F(U) \simeq F(V)$ se e solo se $U \simeq V$.
(2) Se U è indecomponibile allora $F(U)$ è indecomponibile.

Un tale funtore si dice una immersione di B in A (questa ultima terminologia è solo a uso e consumo di questi esercizi)

Una richiesta più forte della precedente potrebbe esserce che per ogni U, V il funtore F determina un isomorfismo
$$\mathrm{Hom}_A(F(U), F(V)) \simeq \mathrm{Hom}_B(U, V).$$
Un tale funtore si dice pieno e in questo caso diciamo che B è contenuto in modo piendo in A. In particolare un'algebra A si dice selvaggia in modo pieno se S è contenuto in modo pieno in A. In realtà la definizione di algebra selvaggia è un poco più forte di questa e si chiede che il funtore deve essere della forma $F(U) = M \otimes_B U$ dove M è un $A - B$-bimodulo che come B modulo è libero e finito su B.

La scelta dell'algebra $S = \mathbb{C}\langle x, y\rangle$ è motivata dal seguente fatto.

4.3. **Esercizio.** Sia R una $\mathbb{C}$ algebra generata (come $\mathbb{C}$-algebra) da $x_1, \dots, x_n$. Una rappresentazione di R in Repf_R è quindi il dato di uno spazio vettoriale di dimensione finita V e di n endomorfismi lineari di V, $A_1, \dots, A_n$ che verificano alcune relazioni. Ad una tale rappresentazione possiamo associare una rappresentazione di F nel seguente modo. Come spazio vettoriale scegliamo $F(V) = V^n$ e l'azione dei generatori x, y di S su U è data dagli endomorfismi A, B di $F(V)$ descritti dalle seguenti matrici a blocchi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ & & \ddots & \\ & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} A_1 & 1 & 0 \dots & \\ 0 & A_2 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

Dimostrare che F è una immersione piena di R in S.

In particolare un'algebra selvaggia contiene in modo pieno le rappresentazioni di una qualsiasi algebra finitamente generata.

4.3.1. *Classificare le rappresentazioni di un'algebra selvaggia.* In generale classificare le rappresentazioni di dimensione finita di una algebra selvaggia viene considerato un problema che ha poche speranze di avere una soluzione veramente soddisfacente, tuttavia questa affermazione non deve essere preso come un teorema, diciamo più come un avvertimento.

Tuttavia il viceversa è vero. Se un'algebra associativa di dimensione finita non è selvaggia allora le sue rappresentazioni indecomponibili di dimensione n possono essere classificate da un numero finito di famiglie 0 o 1-dimensionali. Questo è il contenuto di un teorema di Drozd. Non conosco la dimostrazione di questo teorema né so dare una buona referenza, sicuramente l'argomento è affrontato nel libro di Auslander, Reiten e Smalo.

4.4. **Esercizio.** L'algebra commutativa $R = \mathbb{C}[t, u, z]$ è selvaggia. Data una rappresentazione di S sullo spazio vettoriale V determinata dagli endomorfismi A, B che descrivono l'azione di x, y definiamo una rappresentazione $F(V)$ di R sullo spazio vettoriale $V \oplus V$ sul quale t, u, z agiscono mediante gli endomorfismi:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che F definisce una immersione di S in R.

4.5. **Esercizio *.** Si noti che la costruzione dell'esercizio precedente non solo dimostra che $\mathbb{C}[t, u, z]$ è selvaggia ma anche che l'algebra $A = \mathbb{C}[t, u, z]/(t, u, z)^2$ è selvaggia. Si dimostri che A non è selvaggia in modo pieno.

4.6. **Esercizio ***.** Dimostrare che l'algebra di Lie $L = \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Y$ con commutatore $[X, Y] = Y$ è selvaggia.

4.7. **Esercizio ***.** Dimostrare che $\mathbb{C}[x, y]$ è selvaggia.

Questi due ultimi esercizi, li so fare solo invocando dei risultati più generali. Mi aspetterei però che una dimostrazione più diretta esista, solo che io non sono riuscito a trovarla. Per onestà meriterebbero più di tre stellete ma credo che se ne fa uno l'altro lo fa uguale.

4.8. **Rappresentazioni infinito dimensionali******.** Le rappresentazioni infinito dimensionali delle algebre di Lie sono molto interessanti ma anche molto complicate. Perfino nel caso di $\mathfrak{sl}(2)$ una classificazione delle rappresentazioni infinito dimensionale non sono note. Non mi è chiaro se lo siano le rappresentazioni irriducibili, credevo che lo fossero quasi (vedi l'articolo di Block, "Irreducible representations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ and of the Weyl algebra" Advances in Math. 1981). Mi hanno segnalato un libro che potrebbe contenere una classificazione completa: "Lectures on $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-modules" di Mazorchuck. Un seminario abbastanza dettagliato su questo argomento vale 6 stellette ed è quindi alternativo all'esame.

4.9. **Esercizio ***.** Si dimostri che se tutte le rappresentazioni di un'algebra di Lie complessa L finito dimensionale sono completamente riducibili allora $L = 0$.

5. Teoria geometrica degli invarianti e rappresentazioni

Sia L una algebra di Lie finito dimensionale con base $X_1, \dots, X_m$ e con commutatori dati da

$$[X_i, X_j] = \sum_h a_{ij}^h X_h.$$

Allora dare una rappresentazione nello spazio vettoriale $\mathbb{k}^n$ è come dare n matrici $A_1, \dots, A_m$ tali che

$$[A_i, A_j] = \sum_h a_{ij}^h A_h. \tag{1}$$

Questo definisce una sottovarietà

$$\mathcal{R}_n = \{(A_1, \dots, A_m) \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(\mathbb{k}) : \text{ le equazioni (1) sono soddisfatte}\}$$

Lo spazio degli omomorfismi tra la rappresentazione di dimensione n associata alla m-upla $(A_1, \dots, A_m)$ e quella di dimensione ℓ associata alla m-upla $(B_1, \dots, B_m)$ è dato dalle matrici C di forma $\ell \times n$ tali che

$$C \cdot A_i = B_i \cdot C$$

per $i = 1, \dots, m$. In particolare le rappresentazioni di dimensione n a meno di isomorfismo sono classificate dal quoziente

$$\mathcal{R}_n / GL(n)$$

dove l'azione di $GL(n)$ su $\mathcal{R}_n$ è dato da $g \cdot (A_1, \dots, A_m) = (gA_1g^{-1}, \dots, gA_mg^{-1})$. Vale il seguente teorema

Teorema 1. *L'orbita della m-upla $(A_1, \dots, A_m)$ è chiusa se e solo se la rappresentazione associata è semisemplice.*

5.1. **Esercizio.** Si dimostri il teorema. L'implicazione $\Rightarrow$ è semplice e è stata data un pò velocemente in classe. L'altra implicazione non è molto diversa una volta che si prenda per buono il seguente risultato.

Teorema 2. *Sia U una rappresentazione finito dimensionale e algebrica del gruppo $G = GL(n)$. Una orbita Gx di G in U è chiusa se e solo se per ogni sottogruppo ad un parametro $\chi : \mathbb{k}^* \longrightarrow G$ se esiste $\lim_{t\longrightarrow} \chi(t)x = y$ allora tale limite appartiene ad O.*

Per spiegare l'enunciato del teorema devo ricordare due definizioni. Una rappresentazione $\rho : GL(n) \longrightarrow GL(m)$ con $\rho(g) = \rho_{ij}(g)$ si dice algebrica se le $\rho_{ij}(g)$ sono della forma polinomio nelle entrate della matrice g diviso una poteza del determinante di g.

Un sottogruppo ad un parametro $\chi : \mathbb{k}^* \longrightarrow GL(n)$ è un morfismo di gruppi della forma

$$\chi(t) = g \begin{pmatrix} t^{a_1} & 0 & \dots & \\ 0 & t^{a_2} & 0 & \dots \\ & & \ddots & \\ & \dots & 0 & t^{a_n} \end{pmatrix} g^{-1}$$

I teoremi 1 e 2 valgono, oltre che per $GL(n)$ per i gruppi riduttivi, in particolare per i gruppi la cui algebra di Lie è semisemplice. In generale se U è una rappresentazione algebrica di G e M una sottovarietà chiusa di U stabile per l'azione di G esiste una varietà N che classifica le orbite chiuse di G e ha altre buone proprietà. Per tutta questa sezione si può vedere il libro di Mumford, Fogarty e Kirwan "Geometric invariant theory", quello di Newstead "Introduction to moduli problems and orbit spaces" o quello di Dolgachev "Lectures on invariant theory". Una buona referenza (specialmente per il teorema 3 che si chiama criterio di Hilbert-Mumford) sono anche gli appunti di Brion "Invariants et covariants des groupes algebriques reductifs" che trovate su internet.

6. Algebre riduttive

Quello che abbiamo fatto è contenuto negli esercizi 5 a pagina 30 e nella proposizione 19.1 del libro di Humphreys.

6.1. **Esercizio.** Sia $\mathbb{k}$ di caratteristica zero. Sia V una rappresentazione finito dimensionale di una algebra di Lie L. Indico con $\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ la mappa associata. Sia β_V la forma bilineare definita da

$$\beta(x, y) = tr(\rho(x)\rho(y)).$$

Si dimostri che se β_V è non degenere allora L è riduttiva.

6.2. **Esercizio.** Esibire un'algebra finito dimensionale complessa che abbia una forma bilineare simmetrica invariante e non degenere ma che non sia riduttiva.

7. Algebre di Lie classiche

Con algebre classiche intendiamo le algebre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$.

7.1. **Esercizio.** Dimostrare i seguenti isomorfismi

$$\mathfrak{sp}(2) \simeq \mathfrak{sl}(2) \qquad \mathfrak{sp}(4) \simeq \mathfrak{so}(5) \qquad \mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{C} \qquad \mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{sl}(2) \qquad \mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2) \qquad \mathfrak{so}(6) \simeq \mathfrak{sl}(4).$$

7.2. **Esercizio.** Dimostrare che con le scelte delle forme bilineari fatte a lezione le matrici diagonali sono delle algebre torali massimali delle algebre classiche.

7.3. **Esercizio U.** Dare una descrizione esplicita delle algebre di Lie classiche con le scelte delle forme bilineari fatte a lezione.

7.4. **Esercizio U.** Dare una descrizione esplicita del sistema di radici e degli spazi peso L_α per le algebre di Lie classiche con le scelte delle forme bilineari fatte a lezione.

7.5. **Esercizio.** Dimostrare che $\mathfrak{sl}(n)$ per $n \geqslant 2$, $\mathfrak{sp}(2n)$ per $n \geqslant 1$ e $\mathfrak{so}(n)$ per $n \geqslant 8$ o $n = 3, 5, 7$ sono algebre di Lie semplici.

7.6. **Esercizio.** Dimostrare che la forma di Killing per $\mathfrak{sl}(n)$ soddisfa $\kappa(X, Y) = 2n \operatorname{Tr}(XY)$.

7.7. **Esercizio U.** Determinare il gruppo di Weyl per i gruppi classici.

7.8. **Esercizio *.** Mettere in relazione il gruppo di Weyl e il sistema di radici dei gruppi classici con l'n-simplesso regolare o l'ipercubo di dimensione n.

7.9. **Esercizio U.** Determinare la matrice di Cartan e il diagramma di Dynkin per le algebre di Lie classiche.

8. Sistemi di radici, diagrammi di Dynkin

8.1. **Esercizio.** Dimostrare che $\Phi^\vee$ è un sistema di radici e dare un esempio in cui Φ e $\Phi^\vee$ non sono isomorfi.

8.2. **Esercizio U.** Terminare la dimostrazione iniziata a lezione. Se a due sistemi di radici è associata la stessa matrice di Cartan allora i due sistemi di radici sono isomorfi.

8.3. **Esercizio U.** Sia Φ l'unione disgiunta di due insieme ortogonali tra loro Φ_1 e Φ_2. Sia E_i lo span di Φ_i e Δ_i l'intersezione di una base Δ con Φ_i. Si dimostri che $\Phi_i \subset E_i$ è un sistema di radici e che Δ_i è una sua base.

8.4. **Esercizio U.** Sia Φ un sistema di radici. Si dimostri che Φ è irriducibile se e solo se il diagramma di Dynkin è connesso.

8.5. **Esercizio U.** Si dimostri inoltre che Φ si può scrivere in un unico modo come unione di sistemi irriducibili disgiunti Φ_i l'uno ortogonale all'altro.

8.6. **Esercizio.** Sia Φ irriducibile. Dimostrare che un automorfismo di Φ è una isometria di E. Dimostrare che W è normale nel gruppo degli automorfismi di $\operatorname{Aut}(\Phi)$. Calcolare $\operatorname{Aut}(\Phi)/W$ per i vari sistemi di radici irriducibili.

9. $L \longmapsto \Phi$ è ben definita ***

In questa sezione diamo una lista di esercizi che dimostrano, in modo più elementare di quello che faremo vedere a lezione o che trovate sull'Humphreys, che il sistema di radici associato ad una algebra di Lie è univocamente definito, ovvero non dipende dalla scelta di un'algebra torale massimale. Nella soluzione si può già usare il fatto che abbiamo iniziato a dimostrare a lezione che se L e L' sono due algebre di Lie con sistema di radici associati Φ e Φ' (rispetto alla scelta di una qualche algebra torale massimale) isomorfi allora L e L' sono isomorfe. La soluzione scritta in tex di tutti gli esercizi di questa sezione vale 3 stellette. (c'è una casistica aritmetica semplicissima ma delicata, spero di non essermi perso qualche caso per strada).

9.1. **Esercizio U.** Sia L un'algebra di Lie semisemplice. Si dimostri che L è semplice se e solo se Φ è irriducibile. Più precisamente se $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$ è la decomposizione di L in ideali semplici e $\Phi_i \subset E_i$ è il sistema di radici associato a L_i allora Φ_i è irriducibile, $\Phi \subset E = \bigoplus E_i$ è l'unione disgiunta dei Φ_i, e Φ_i è ortogonale a Φ_j per $i \neq j$.

9.2. **Esercizio.** Per ogni sistema di radice semplice $\Phi \subset E$ si calcoli $\sharp(\Phi) + \dim E$ (si possono utilizzare liberamente le descrizioni dei sistemi di radici date nell'Humphreys).

9.3. **Esercizio.** Sia L un'algebra di Lie semplice, T, S due algebre torali massimali di L, $\Phi \subset T^*$ e $\Psi' \subset S^*$ i sistemi di radici associati. Si dimostri, usando l'esercizio precedente, che $\Phi \simeq \Psi$ oppure che

(1) Φ e Ψ sono di tipo B_n e C_n;
(2) Φ e Ψ sono uno di tipo E_6 e l'altro di tipo B_6 o C_6.

9.4. **Esercizio.** Si dimostri che nel caso delle algebre $\mathfrak{so}(2n+1)$ e $\mathfrak{sp}(2n)$ il sistema di radici associato non dipende dalla scelta dell'algebra torale massimale dimostrando che tutte le algebre torali massimali sono "coniugate" (rispetto a cosa fa parte dell'esercizio).

9.5. **Esercizio.** Sia L un'algebra di Lie semplice, T, S due algebre torali massimali di L, $\Phi \subset T^*$ e $\Psi' subset S^*$ i sistemi di radici associati. Si dimostri che $\Phi \simeq \Psi$.