

Alcuni elementi di teoria tratti dal corso

Definizione 1. Sia J un intervallo chiuso con parte interna $I = \text{Int}(J)$ non vuota. Diremo che $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 su J se $\gamma \in C^1(I)$ e nel caso $\lambda = \min J$, allora esiste la derivata destra di γ in λ , ovvero

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(\lambda + t) - \gamma(\lambda)}{t} = \gamma'_+(\lambda), \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \lambda^+} \gamma'(t) = \gamma'_+(\lambda)$$

mentre nel caso $\max J = \mu$ esiste la derivata sinistra

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\gamma(\mu + t) - \gamma(\mu)}{t} = \gamma'_-(\mu), \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \mu^-} \gamma'(t) = \gamma'_-(\mu)$$

Definizione 2. (*Curva C^1 a tratti*). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso. Sia $\gamma : J \rightarrow \Omega$ una funzione continua. Abbiamo i seguenti casi.

1. Se $J = \mathbb{R}$, assumiamo che esistano $t_0 < t_1 < \dots < t_p$ tali che

(a) $J =] - \infty, t_0] \cup \bigcup_{j=1}^p [t_{j-1}, t_j] \cup [t_p, +\infty[$

(b) le restrizioni $\gamma|_{] - \infty, t_0]}$, $\gamma|_{[t_p, +\infty[}$ e $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ per $j = 1, \dots, p$, sono di classe C^1 .

2. Se $J =] - \infty, \lambda]$, assumiamo che esistano $t_0 < t_1 < \dots < t_p = \lambda$ tali che

(a) $J =] - \infty, t_0] \cup \bigcup_{j=1}^p [t_{j-1}, t_j]$

(b) le restrizioni $\gamma|_{] - \infty, t_0]}$ e $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ per $j = 1, \dots, p$, sono di classe C^1 .

3. Se $J = [\lambda, +\infty[$, assumiamo che esistano $\lambda = t_0 < t_1 < \dots < t_p$ tali che

(a) $J = \bigcup_{j=1}^p [t_{j-1}, t_j] \cup [t_p, +\infty[$

(b) le restrizioni $\gamma|_{[t_p, +\infty[}$ e $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ per $j = 1, \dots, p$, sono di classe C^1 .

4. Se $J = [\lambda, \mu]$, assumiamo che esistano $\lambda = t_0 < t_1 < \dots < t_p = \mu$ tali che

(a) $J = \bigcup_{j=1}^p [t_{j-1}, t_j]$

(b) le restrizioni $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ per $j = 1, \dots, p$, sono di classe C^1 .

Definizione 3. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n e sia $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Sia $\gamma : J \longrightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti. Riferendosi alle notazioni della Definizione 2, abbiamo i seguenti casi.

1. Se $J = \mathbb{R}$ e gli integrali impropri $\int_{-\infty}^{t_0} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$, $\int_{t_p}^{+\infty} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ convergono, allora possiamo definire

$$\int_{\gamma} F = \int_{-\infty}^{t_0} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_{t_p}^{+\infty} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \sum_{j=1}^p \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

2. Se $J =] - \infty, \lambda]$ e l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{t_0} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ converge, poniamo

$$\int_{\gamma} F = \int_{-\infty}^{t_0} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \sum_{j=1}^p \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

3. Se $J = [\lambda, +\infty[$ e l'integrale improprio $\int_{t_p}^{+\infty} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ converge, poniamo

$$\int_{\gamma} F = \sum_{j=1}^p \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_{t_p}^{+\infty} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

4. Se $J = [\lambda, \mu]$, poniamo

$$\int_{\gamma} F = \sum_{j=1}^p \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

In ognuno di questi casi diremo che $\int_{\gamma} F$ è l'integrale di F lungo la curva γ . Nei casi in cui γ sia definita in un intervallo illimitato diremo che l'integrale di F lungo la curva γ converge.

Definizione 4. Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti. Diremo che γ è chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Teorema 1. Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n e sia $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua.

1. Allora F è conservativo se e solo se per ogni curva chiusa $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ si ha $\int_{\gamma} F = 0$.
2. (Costruzione locale della primitiva). Se F è conservativo, allora per ogni aperto $\Omega' \subset \Omega$, fissato $x_0 \in \Omega$ e data una qualunque famiglia di curve C^1 a tratti $\{\gamma_x\}_{x \in \Omega'}$ con la proprietà che per ogni $x \in \Omega'$ si ha che $\gamma_x : [a_x, b_x] \longrightarrow \Omega$, $\gamma_x(a_x) = x_0$ e $\gamma_x(b_x) = x$, allora la funzione $f : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\gamma_x} F$ è ben definita per ogni $x \in \Omega'$, ovvero dipende solo da x e x_0 e non dalla curva γ_x , inoltre $f \in C^1(\Omega')$ e

$$\nabla f(x) = F(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega'.$$

Corollario 1. Sia Ω aperto e connesso per archi e si supponga che per ogni curva chiusa $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ si abbia $\int_{\gamma} F = 0$. Allora la primitiva f può essere costruita da un'unica famiglia di curve aventi le proprietà di cui al punto 2 del Teorema 1.

DIMOSTRAZIONE. Se Ω è connesso per archi, allora fissato arbitrariamente $x_0 \in \Omega$ per ogni $x \in \Omega$ possiamo determinare una curva C^1 a tratti $\gamma_x : [a_x, b_x] \longrightarrow \Omega$ tale che $\gamma_x(a_x) = x_0$ e $\gamma_x(b_x) = x$. Quindi abbiamo una famiglia di funzioni $\{\gamma_x\}_{x \in \Omega}$ che soddisfa le ipotesi 2 del Teorema 1 ove $\Omega' = \Omega$, pertanto $f(x) = \int_{\gamma_x} F$ definisce una primitiva di F su Ω . $\#$

Osservazione 1. Se F è tale che per ogni curva chiusa $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ si abbia $\int_{\gamma} F = 0$, allora possiamo costruire il suo potenziale utilizzando tante famiglie di curve quante sono le componenti connesse di Ω .