Valentino Magnani

21/10/2009

Note: rispetto la versione del 15 Ottobre si sono aggiunti gli Esercizi 5,6,7 e 10, assieme ad una terza domanda nell'Esercizio 8.

Differenziabilità e studi di funzioni di più variabili

Esercizio 1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Provare la differenziabilità di f in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ e calcolarne il relativo differenziale.

Esercizio 2 (Prova del 7 Novembre 2006). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 \log\left(1 + \frac{|y|^\alpha}{x^4}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione f è

1. continua in $\mathbb{R}^2$;
2. differenziabile in $\mathbb{R}^2$;
3. di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y = 0 \\ \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{1/4}} & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}.$$

1. Stabilire se f è continua su $\mathbb{R}^2$.
2. Studiare la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.
3. Stabilire se f ha punti di minimo o di massimo globali e nel caso determinarli.

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \begin{cases} x - y \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ x & \text{se } y = 0 \end{cases} .$$

1. Studiare la continuità di f su $\mathbb{R}^2$.

2. Studiare la differenziabilità di f in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$.

3. Calcolare il massimo ed il minimo di f sul disco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5 Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases} .$$

studiando l'esistenza di massimi o minimi locali e globali e nel caso determinandoli.

Esercizio 6 Sia $f : A \to \mathbb{R}$, ove $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq R, \ |z| \leq 1\}$ ed $f(x,y,z) = xyz$. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo di f su A, calcolandone i rispettivi valori.

Esercizio 7 Sia $f : A \to \mathbb{R}$, ove $A = \{(x,y) : x + y^2 \leq 0\}$ ed $f(x,y) = (y^2 - x)e^{x+y}$. Determinare $\sup_A f$ e $\inf_A f$.

Esercizio 8 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = x\,y\,e^{-4x^2-y^2} .$$

1. Determinare tutti i punti critici di f e studiarne il tipo.

2. Determinari i punti di massimo o minimo locale e globale.

3. Calcolare lo sviluppo di Taylor di f nell'origine con resto uguale ad $o(\|(x,y)\|^4)$.

Esercizio 9 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,\log|x| + y\,\log|y| + z\,\log|z| & \text{se } xyz \neq 0 \\ y\,\log|y| + z\,\log|z| & \text{se } yz \neq 0 \text{ e } x = 0 \\ x\,\log|x| + z\,\log|z| & \text{se } xz \neq 0 \text{ e } y = 0 \\ x\,\log|x| + y\,\log|y| & \text{se } xy \neq 0 \text{ e } z = 0 \\ x\,\log|x| & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y = z = 0 \\ y\,\log|y| & \text{se } y \neq 0 \text{ e } x = z = 0 \\ z\,\log|z| & \text{se } z \neq 0 \text{ e } x = y = 0 \end{cases} .$$

1. Determinare $\sup\limits_{\mathbb{R}^3} f$ e $\inf\limits_{\mathbb{R}^3} f$.
2. Provare che f è continua in $\mathbb{R}^3$.
3. Determinare tutti i punti critici di f e studiarne il tipo.
4. Determinare i punti di massimo o minimo locale e globale.

Esercizio 10 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases} .$$

Determinare i punti di massimo o minimo locali e globali, nel caso esistano.