Valentino Magnani

26/10/2009

Curve, campi e potenziali

Esercizio 1 Sia $\gamma : [-1, 1 + \frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come segue

$$\gamma(t) = \begin{cases} (|t|, t) & -1 \le t \le 1 \\ \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1 - t\right), \sin\left(\frac{\pi}{4} + 1 - t\right)\right) & 1 \le t \le \frac{\pi}{4} + 1 \end{cases}$$

1. Si mostri che γ è C^1 a tratti, tracciandone un grafico nel piano ed evidenziandone il verso di percorrenza, determinando in particolare il punto iniziale p e finale q.

2. Stabilire se $F(x, y) = (-y, x)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ e calcolare $\int_\gamma F$.

3. Stabilire se $F(x, y) = (y, x)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ e calcolare $\int_\gamma F$.

4. Stabilire se $F(x, y) = (-1, 1)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ e calcolare $\int_\gamma F$.

Definizione. Sia $\gamma :]a, b[\longrightarrow \Omega$ un curva di classe C^1 sull'intervallo aperto $]a, b[$, ove $-\infty \le a \le b \le +\infty$. Sia $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Diremo che l'integrale di F lungo la curva γ converge se l'integrale

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \tag{1}$$

converge in senso improprio. Se si ha convergenza denoteremo questo numero con $\int_\gamma F$ e diremo che rappresenta *l'integrale di F lungo γ*. Nel caso in cui (1) sia uguale a $\pm\infty$ potremo comunque porre $\int_\gamma F = \pm\infty$.

Esercizio 2 Si consideri $F(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ definito su $\mathbb{R}^2$. Al variare di $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$ nei casi in cui

1. γ è l'arco di circonferenza che congiunge il punto $(1,1)$ al punto $(-1,-1)$ muovendosi in senso orario

2. γ è l'arco di circonferenza che congiunge il punto $(1,1)$ al punto $(-1,-1)$ muovendosi in senso antiorario

3. Se $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è definita come $\gamma(t) = (t^3, e^{-t^2})$, stabilire la convergenza dell'integrale di F lungo γ e nel caso calcolare $\int_\gamma F$, utilizzando eventualmente la formula $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Esercizio 3 Sia $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$ e si consideri al variare di $a \in \mathbb{R}$ il campo $F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{\|(x,y)\|^a}, \dfrac{x}{\|(x,y)\|^a}\right)$.

1. Si provi che F è conservativo in Ω se e solo se $a = 2$.

2. Data $\gamma :]0,2\pi[\longrightarrow \Omega$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, provare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha che F converge lungo γ e vale $\displaystyle\int_\gamma F = 2\pi$.

3. Data $\gamma :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, t)$, provare che γ assume valori in Ω. Determinare quindi per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale di F lungo γ converge.

4. Sia $0 < r < 1$ e consideriamo la curva $\gamma_r : [r, 2+\pi-r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, ove

$$\gamma_r(t) = \begin{cases} (0,t) & r \leq t \leq 1 \\ \big(\cos(t-1+\frac{\pi}{2}), \sin(t-1+\frac{\pi}{2})\big) & 1 \leq t \leq 1+\frac{\pi}{2} \\ (2+\frac{\pi}{2}-t, 0) & 1+\frac{\pi}{2} \leq t \leq 2+\frac{\pi}{2}-r \\ r\big(\cos(2+\frac{3\pi}{2}-r-t), \sin(2+\frac{3\pi}{2}-r-t)\big) & 2+\frac{\pi}{2}-r \leq t \leq 2+\pi-r \end{cases}.$$

Calcolare $\int_{\gamma_r} F$ e determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che esista $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} F$ e calcolarlo.

Esercizio 4 Sia $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, ove $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e per $p \in \mathbb{R}$ definiamo

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^p}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^p}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^p} \right) .$$

Al variare di p in $\mathbb{R}$ stabilire se F è conservativo e determinarne una primitiva.

Esercizio 5 Determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$F(x,y) = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}, \frac{cx+dy}{x^2+y^2} \right)$$

1. sia conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
2. sia conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$

e in entrambi i casi si determini una primitiva.

Esercizio 6 Sia $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 \neq y^2 + z^2\}$ e

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{x}{x^2-y^2-z^2}, \frac{y}{x^2-y^2-z^2}, \frac{z}{x^2-y^2-z^2} \right) .$$

Stabilire se F è conservativo in Ω e nel caso determinarne un potenziale.