Valentino Magnani
Pisa, 15/10/2009

Alcuni esercizi su limiti di più variabili.

Esercizio 1. Si studi l'estendibilità continua di $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x+y}$ su tutto $\mathbb{R}^2$, scrivendo una formula esplicita per l'estensione.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{x^2(y^2)^\beta}{(x^2)^\beta + y^4}$.

(1) Al variare di $\beta > 0$ si studi l'eventuale estensione continua di f su tutto $\mathbb{R}^2$.
(2) Stabilire se è possibile estendere f con continuità sulla chiusura del suo dominio.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{xy^2 \log(|xy|)}{(|x|+|y|)}$.

(1) Determinare il dominio di f, ovvero l'insieme A dei punti (x,y) di $\mathbb{R}^2$ tali che $f(x,y)$ sia ben definita.
(2) Stabilire se è possibile estendere f con continuità sulla chiusura del suo dominio.

Esercizio svolto 1. Provare che $x^2 + y^4 \to +\infty$ per $\|(x,y)\| \to +\infty$.

SVOLGIMENTO. Proviamo che vale la disuguaglianza

$$x^2 + y^4 \geq x^2 + y^2 - 1 \quad \text{per ogni} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se $|y| \geq 1$, allora $y^4 \geq y^2$ pertanto $x^2 + y^4 \geq x^2 + y^2$. Nel caso rimanente, ove $|y| \leq 1$, allora $x^2+y^2 \leq x^2+1$, quindi

$$x^2 + y^4 \geq x^2 \geq x^2 + y^2 - 1.$$

Abbiamo quindi provato che

$$x^2 + y^4 \geq \|(x,y)\|^2 - 1$$

Da ció segue immediatamente la tesi.

Esercizio svolto 2. Provare che per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^{2n} + y^{2n} = +\infty.$$

SVOLGIMENTO. Osserviamo innanzitutto che

$$x^{2n} + y^{2n} \geq \left(\max\{|x|, |y|\}\right)^{2n} .$$

Inoltre si ha

$$\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 2\left(\max\{|x|, |y|\}\right)^2$$

pertanto ne segue che

$$x^{2n} + y^{2n} \geq \frac{\|(x,y)\|^{2n}}{2^n} .$$

Ciò conduce immediatamente alla tesi. Infatti dato $N > 0$, esiste $M > 0$ tale che $M^{2n}/2^n \geq N$. Quindi per $\|(x,y)\| \geq M$, ne segue che

$$x^{2n} + y^{2n} \geq \frac{\|(x,y)\|^{2n}}{2^n} \geq \frac{M^{2n}}{2^n} \geq N .$$

L'esistenza del numero $M > 0$ tale che $M^{2n}/2^n \geq N$ è dovuta al fatto che $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n} = +\infty$.

Esercizio 4. Si provi che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2 y}{x^4 + y^4} = 0$.

Esercizio 5. Sia $\alpha > 0$ e sia $E = [0, +\infty[\times\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consideriamo la funzione $f_\alpha : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = \dfrac{\left[\log(1 + xy^4)\right]^\alpha}{x^2 + y^4}$. Si studi l'esistenza del limite di f_α e nel caso lo si determini per $\|(x,y)\| \to +\infty$.

Definizione 1. Sia X spazio vettoriale normato e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, ove $A \subset X$ e $\sup_{x\in A} \|x\| = +\infty$. Diremo che f *tende ad* $l \in \mathbb{R}$ *per* $x \to \infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$, dipendente eventualmente da ε, tale che per ogni $x \in A$ con $\|x\| \geq M$ si ha $f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. In tal caso scriveremo $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.

Definizione 2. Sia X spazio vettoriale normato e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, ove $A \subset X$ e $\sup_{x\in A} \|x\| = +\infty$. Diremo che f *tende a* $+\infty$ $\big(-\infty\big)$ *per* $x \to \infty$ se per ogni $N > 0$ esiste $M > 0$, eventualmente dipendente da N, tale che per ogni $x \in A$ con $\|x\| \geq M$ si ha $f(x) \geq N$ $\big(f(x) \leq -N\big)$. In tal caso scriveremo $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \big(\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\big)$.