Valentino Magnani
3/12/2009

Alcuni esercizi su massimi e minimi vincolati

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \frac{x^3 - x^2y + y^2x - y^3}{\sqrt{1 + \log(x^2+y^2)}} \,.$$

Si determinino massimo e minimo di f sulla circonferenza $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y,z) = z + x^2 + xy + y^2 \,.$$

Si determinino massimo e minimo di f su $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1\}$.

Esercizio 3 [Dalla prova del 10/01/2005] Stabilire l'esistenza di punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2}$$

sull'insieme $D = \{(x,y) \mid x \neq 0,\ x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$ e nel caso determinarli.

Esercizio 4 Si definisca $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1\right\}$.

1. Si provi che la funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{xy-9}$ è ben definita su D.
2. Si stabilisca se f ha massimo o minimo su D e nel caso determinarli.

Esercizio 5 [Dalla prova del 11/11/2004] Determinare i punti di massimo e minimo ed eventuali punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = xy + yz,$$

sul dominio $A = \{x^2+y^2+2z^2 \leq 1\} \cap \{z \geq 0\}$.

Esercizio 6 [Dalla prova del 8/01/2007] Si consideri l'insieme

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2y - xe^y = 2\}.$$

Si mostrare che in un intorno di $(0, 1)$ l'insieme Z è il grafico di una funzione $y = y(x)$.

Esercizio 7 [Dalla prova del 29/01/2007] Tra tutti i parallelepipedi con gli spigoli paralleli agli assi ed inscritti nell'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

determinare quello di volume massimo.