

### Alcune risoluzioni degli esercizi su curve, campi e potenziali

**Esercizio 1** Sia  $\gamma : [-1, 1 + \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita come segue

$$\gamma(t) = \begin{cases} (|t|, t) & -1 \leq t \leq 1 \\ \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + 1 - t \right), \sin \left( \frac{\pi}{4} + 1 - t \right) \right) & 1 \leq t \leq \frac{\pi}{4} + 1 \end{cases}$$

1. Si mostri che  $\gamma$  è  $C^1$  a tratti, tracciandone un grafico nel piano ed evidenziandone il verso di percorrenza, determinando in particolare il punto iniziale  $p$  e finale  $q$ .
2. Stabilire se  $F(x, y) = (-y, x)$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e calcolare  $\int_{\gamma} F$ .
3. Stabilire se  $F(x, y) = (y, x)$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e calcolare  $\int_{\gamma} F$ .
4. Stabilire se  $F(x, y) = (-1, 1)$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e calcolare  $\int_{\gamma} F$ .

**SVOLGIMENTO.** 1. Si osserva che le curve  $\gamma|_{[-1,0]}$ ,  $\gamma|_{[-1,0]}$  e  $\gamma|_{[1,1+\frac{\pi}{4}]}$  sono  $C^1$ , inoltre  $p = (1, -1)$  e  $q = (\sqrt{2}, 0)$ . 2. Abbiamo  $\partial_y F_1 = -1 \neq 1 = \partial_x F_2$ , quindi  $F$  non è conservativo. L'integrale  $\int_{\gamma} F$  è uguale alla somma

$$\int_{-1}^0 \langle (-t, -t), (-1, 1) \rangle + \int_0^1 \langle (-t, t), (1, 1) \rangle + \int_{\gamma|_{[1,1+\frac{\pi}{4}]}} F$$

ove  $\int_{\gamma|_{[1,1+\frac{\pi}{4}]}} F = -\int_C F$  per  $C : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C(t) = \sqrt{2}(\cos t, \sin t)$ . Quindi si ha

$$\int_C F = 2 \int_0^{\pi/4} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ne segue che  $\int_{\gamma} F = \pi/2$ . 3. In questo caso  $F$  ha primitiva  $f(x, y) = xy$ , pertanto

$$\int_{\gamma} F = f(q) - f(p) = 1.$$

4. Anche in questo caso  $F$  è conservativo ed una sua primitiva è  $g(x, y) = y - x$ , quindi

$$\int_{\gamma} F = g(q) - g(p) = -\sqrt{2} + 2.$$

**Definizione.** Sia  $\gamma : ]a, b[ \longrightarrow \Omega$  un curva di classe  $C^1$  sull'intervallo aperto  $]a, b[$ , ove  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Sia  $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Diremo che l'integrale di  $F$  lungo la curva  $\gamma$  converge se l'integrale

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \quad (1)$$

converge in senso improprio. Se si ha convergenza denoteremo questo numero con  $\int_{\gamma} F$  e diremo che rappresenta l'integrale di  $F$  lungo  $\gamma$ . Nel caso in cui (1) sia uguale a  $\pm\infty$  potremo comunque porre  $\int_{\gamma} F = \pm\infty$ .

**Esercizio 2** Si consideri  $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  definito su  $\mathbb{R}^2$ . Al variare di  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  calcolare  $\int_{\gamma} F$  nei casi in cui

1.  $\gamma$  è l'arco di circonferenza che congiunge il punto  $(1, 1)$  al punto  $(-1, -1)$  muovendosi in senso orario
2.  $\gamma$  è l'arco di circonferenza che congiunge il punto  $(1, 1)$  al punto  $(-1, -1)$  muovendosi in senso antiorario
3. Se  $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  è definita come  $\gamma(t) = (t^3, e^{-t^2})$ , stabilire la convergenza dell'integrale di  $F$  lungo  $\gamma$  e nel caso calcolare  $\int_{\gamma} F$ , utilizzando eventualmente la formula  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

**SVOLGIMENTO.** Abbiamo  $\partial_y F_1(x, y) = b$  e  $\partial_x F_2 = c$ , pertanto possiamo decomporre  $F = G + H$ , ove  $G(x, y) = (ax + by, bx + dy)$ ,  $H(x, y) = (c - b)(0, x)$  e osserviamo che  $\partial_y G_1 = \partial_x G_2$ . Essendo  $\mathbb{R}^2$  semplicemente connesso, sappiamo che senz'altro esiste una primitiva  $g$  di  $G$  su  $\mathbb{R}^2$ . Questo ci permette di evitare l'utilizzo delle curve e considerare direttamente le equazioni

$$\partial_x g(x, y) = ax + by, \quad \partial_y g(x, y) = bx + dy.$$

Integrando rispetto ad  $x$  la prima equazione abbiamo

$$g(x, y) = a \frac{x^2}{2} + bxy + \varphi(y)$$

quindi deve essere

$$\partial_y g(x, y) = bx + \varphi'(y) = bx + dy.$$

Ne segue che  $g(x, y) = a\frac{x^2}{2} + bxy + d\frac{y^2}{2}$ . 1. Tale arco di circonferenza corrisponde a  $C : [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C(t) = \sqrt{2}(\cos t, \sin t)$ , quindi

$$\int_C F = \int_C G + \int_C H = g(-1, -1) - g(1, 1) + 2(c - b) \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2 t dt.$$

Tenendo conto che  $\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2 t dt = \pi/2$  e che  $g$  è pari, ne segue che  $\int_C F = \pi(c - b)$ .

2. In questo caso l'arco di circonferenza è descritto dalla curva  $C : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C(t) = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} - t), \sin(\frac{\pi}{4} - t))$ , ragionando come prima si deduce che

$$\int_C F = \int_C H = 2(b - c) \int_0^\pi \cos^2(\frac{\pi}{4} - t) dt = \pi(b - c).$$

3. Fissiamo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  con  $\lambda < \mu$  e osserviamo che

$$\int_{\gamma_{[\lambda, \mu]}} F = g(\mu^3, e^{-\mu^2}) - g(\lambda^3, e^{-\lambda^2}) + (c - b) \int_\lambda^\mu \gamma_1(t) \dot{\gamma}_2(t) dt.$$

Abbiamo che  $\int_\lambda^\mu \gamma_1(t) \dot{\gamma}_2(t) dt$  è uguale a

$$\int_\lambda^\mu t^3 (e^{-t^2})' dt = t^3 e^{-t^2} \Big|_\lambda^\mu - 3 \int_\lambda^\mu t^2 e^{-t^2}$$

inoltre integrando per parti si ottiene

$$\int_\lambda^\mu t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \left( t e^{-t^2} \Big|_\lambda^\mu - \int_\lambda^\mu e^{-t^2} dt \right) = \frac{o(1) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt}{2}$$

per  $-\lambda, \mu \rightarrow +\infty$ . Abbiamo provato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1(t) \dot{\gamma}_2(t) dt = -\frac{3}{2} \sqrt{\pi}.$$

Inoltre  $g(t^3, e^{-t^2}) \rightarrow 0$  per  $|t| \rightarrow +\infty$ , quindi concludiamo che  $F$  converge lungo  $\gamma$  e

$$\int_\gamma F = \frac{3(b - c)}{2} \sqrt{\pi}.$$

**Esercizio 3** Sia  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$  e si consideri al variare di  $a \in \mathbb{R}$  il campo

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{\|(x, y)\|^a}, \frac{x}{\|(x, y)\|^a} \right).$$

1. Si provi che  $F$  è conservativo in  $\Omega$  se e solo se  $a = 2$ .
2. Data  $\gamma : ]0, 2\pi[ \longrightarrow \Omega$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ , provare che per ogni  $a \in \mathbb{R}$  si ha che  $F$  converge lungo  $\gamma$  e vale  $\int_{\gamma} F = 2\pi$ .
3. Data  $\gamma : ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\sin t, t)$ , provare che  $\gamma$  assume valori in  $\Omega$ . Determinare quindi per quali  $a \in \mathbb{R}$  l'integrale di  $F$  lungo  $\gamma$  converge.
4. Sia  $0 < r < 1$  e consideriamo la curva  $\gamma_r : [r, 2 + \pi - r] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , ove

$$\gamma_r(t) = \begin{cases} (0, t) & r \leq t \leq 1 \\ (\cos(t - 1 + \frac{\pi}{2}), \sin(t - 1 + \frac{\pi}{2})) & 1 \leq t \leq 1 + \frac{\pi}{2} \\ (2 + \frac{\pi}{2} - t, 0) & 1 + \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2 + \frac{\pi}{2} - r \\ r(\cos(2 + \frac{3\pi}{2} - r - t), \sin(2 + \frac{3\pi}{2} - r - t)) & 2 + \frac{\pi}{2} - r \leq t \leq 2 + \pi - r \end{cases}$$

Calcolare  $\int_{\gamma_r} F$  e determinare  $a \in \mathbb{R}$  tale che esista  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} F$  e calcolarlo.

**SVOLGIMENTO.** 1. Poniamo  $z = (x, y)$  e  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Abbiamo quindi

$$\partial_y F_1 = -\frac{|z|^a - ay^2|z|^{a-2}}{|z|^{2a}}, \quad \partial_x F_2 = \frac{|z|^a - ax^2|z|^{a-2}}{|z|^{2a}}.$$

Imponendo l'uguaglianza e semplificando, otteniamo  $-|z|^2 + ay^2 = |z|^2 - ax^2$ , quindi  $a|z|^2 = 2|z|^2$  che implica  $a = 2$ . 2. Basta effettuare il semplice calcolo

$$\int_{\gamma} F = \lim_{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \mu} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = 2\pi.$$

3. Abbiamo l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\langle (-t, \sin t), (\cos t, 1) \rangle}{(t^2 + \sin^2 t)^{a/2}} dt = \int_0^1 \frac{\sin t - t \cos t}{(t^2 + \sin^2 t)^{a/2}} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t^{3-a}(1 + o(1))}{\left(1 + \frac{\sin^2 t}{t^2}\right)^{a/2}}$$

che converge se e solo se  $a < 4$ . 4. Osservando che gli integrali di  $F$  lungo le direzioni radiali sono nulli, abbiamo

$$\int_{\gamma_r} F = \int_{\gamma_r|_{[1, 1+\frac{\pi}{2}]}} F + \int_{\gamma_r|_{[2+\frac{\pi}{2}-r, 2+\pi-r]}} F = \frac{\pi}{2} - r^{2-a} \frac{\pi}{2}$$

il cui limite per  $r \rightarrow 0^+$  converge se e solo se  $a < 2$  ed è uguale a  $\pi/2$ . Osserviamo infatti che definendo  $C : [\pi/2, \pi] \rightarrow \Omega$ ,  $C(t) = (\cos t, \sin t)$  e  $C_r(t) = rC(t)$ , abbiamo

$$\int_{\gamma_r|_{[1, 1+\frac{\pi}{2}]}} F = \int_C F = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_r|_{[2+\frac{\pi}{2}-r, 2+\pi-r]}} F = - \int_{C_r} F = -r^{2-a} \frac{\pi}{2}.$$

**Esercizio 4** Sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  e per  $p \in \mathbb{R}$  definiamo

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} \right).$$

Al variare di  $p$  in  $\mathbb{R}$  stabilire se  $F$  è conservativo e determinarne una primitiva.

**Esercizio 5** Determinare  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tali che

$$F(x, y) = \left( \frac{ax + by}{x^2 + y^2}, \frac{cx + dy}{x^2 + y^2} \right)$$

1. sia conservativo in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
2. sia conservativo in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$

e in entrambi i casi si determini una primitiva.

**Esercizio 6** Sia  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 \neq y^2 + z^2\}$  e

$$F(x, y, z) = \left( -\frac{x}{x^2 - y^2 - z^2}, \frac{y}{x^2 - y^2 - z^2}, \frac{z}{x^2 - y^2 - z^2} \right).$$

Stabilire se  $F$  è conservativo in  $\Omega$  e nel caso determinarne un potenziale.

**SVOLGIMENTO.** Si verifica che  $\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i$ , dove  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ . Quindi nella parte semplicemente connessa di  $\Omega$  si ha un potenziale  $f$  e che soddisfa

$$\partial_x f = -\frac{x}{x^2 - y^2 - z^2}$$

pertanto si ha

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2} \log |x^2 - y^2 - z^2| + C(y, z).$$

Da calcolo diretto abbiamo che  $\partial_y f = F_2$  e  $\partial_z f = F_3$ , quindi  $\partial_y C(y, z) = \partial_x C(y, z) = 0$ , quindi  $C$  è una costante che possiamo porre uguale a zero.