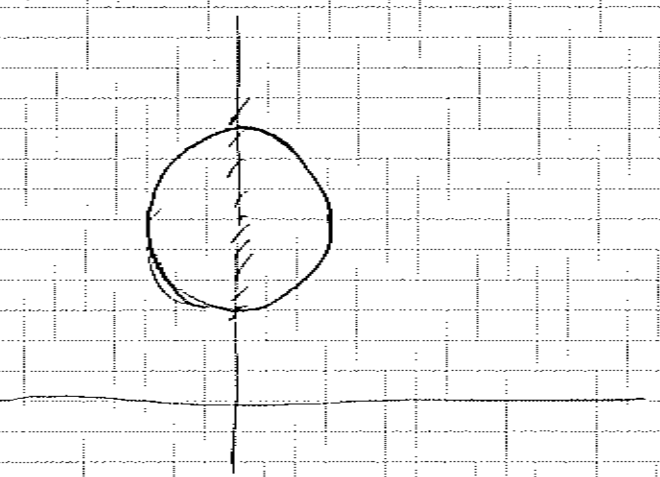
Stabilire l'esistenza di punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2}$$

su $D = \left\{ (x,y) : x \neq 0, \; x^2 + (y-2)^2 \leq 1 \right\}$, in caso affermativo si calcolino esplicitamente.



$|x|, |y-2| \leq 1 \implies 1 \leq y \leq 3 \;, \; |x| \leq 1$

$f(x,y) \longrightarrow +\infty \qquad (x,y) \longrightarrow (0, \bar{y})$

$\forall \, \bar{y} \in [1,3]$

$\implies \sup_D f = +\infty$

$\nabla f = \left(-\frac{2y}{x^3}, \frac{1}{x^2} \right) \neq 0$ in $\mathring{D}$

$\nexists$ punti critici su $\mathring{D}$

$$g = x^2 + (y-2)^2 - 1$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -\dfrac{2y}{x^3} = \lambda x \\ \dfrac{1}{x^2} = \lambda (y-2) \\ x^2 + (y-2)^2 = 1, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

pto critico di $\partial D \cap \{x \neq 0\}$

$$x, y \neq 0 \implies \lambda \neq 0$$

se sostituisco $(y-2) = \dfrac{1}{\lambda x^2}$ nell'eq.

$$x^2 + \frac{1}{\lambda^2 x^4} = 1 \implies x^6 + \frac{1}{\lambda^2} - x^4 = 0$$

eq. sesto grado riducibile al terzo!

Conviene eliminare il moltiplicatore

$$\frac{1}{(y-2)x^2} = -\frac{2y}{x^4} \iff$$

$$x^2 = -2y(y-2) = 4y - 2y^2$$

$$\implies 1 \leq y \leq 2 \quad e$$

$$|x| = 2\sqrt{y - \frac{y^2}{2}} = 2\sqrt{y\left(1 - \frac{y}{2}\right)}$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 4y - 2y^2 + y^2 + 4 - 4y = 1$$

$$\implies y = \pm\sqrt{3} \in [1, 2]$$

$$\Rightarrow y_0 = \sqrt{3} \Rightarrow x_0 = \sqrt{4\sqrt{3}-6}$$

ove $x_0^2 + (y_0-2)^2 = 1$.

Il valore del moltiplicatore è

$$\lambda = \frac{1}{x_0^2(y_0-2)} = \frac{1}{(\sqrt{3}-2)(4\sqrt{3}-6)}$$

La funzione $f_{/D}$ ha minimo globale in quanto $f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)\in D} +\infty$ ed è continua in D, che è un insieme limitato.

Non essendo il minimo assunto in $\mathring{D}$, ne segue che

$$\left(\sqrt{4\sqrt{3}-6}, \sqrt{3}\right) \text{ è}$$

di minimo assoluto in D,

ovvero $\min_D f = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-6}$