

Preesame di Analisi Matematica III del 3 Novembre 2009.

Università di Pisa. Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2009/2010.

SVOLGIMENTO.

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(|x|^\alpha)}{x^2 + y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

- (1) Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua in \mathbb{R}^2 .
- (2) Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia differenziabile in \mathbb{R}^2 .
- (3) Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f appartenga a $C^1(\mathbb{R}^2)$.

SVOLGIMENTO. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo che f è continua nell'aperto $\{(x, y) : x \neq 0\}$ in quanto composizione di funzioni continue. Se $\alpha \leq 2$, allora non esiste il limite di $f(x, 0)$ per $x \rightarrow 0$. Se $\alpha > 2$, allora abbiamo

$$|f(x, y)| \leq |1 + o(1)| |x|^{\alpha-2} \rightarrow 0$$

per $(x, y) \rightarrow (0, \bar{y})$, quindi f è anche continua nei punti $(0, \bar{y})$, ovvero lo è in \mathbb{R}^2 . Riguardo lo studio della differenziabilità poniamo $z = (x, y)$ e calcoliamo

$$f_x = |z|^{-4} \{ \alpha |x|^{\alpha-1} \cos(|x|^\alpha) \operatorname{sgn}(x) |z|^2 - 2x \sin(|x|^\alpha) \}, \quad f_y = -\frac{2y \sin(|x|^\alpha)}{|z|^4}$$

che sono continue in $\{(x, y) : x \neq 0\}$, ove per il teorema del differenziale totale f è anche differenziabile. Abbiamo inoltre $\partial_y f(0, \bar{y}) = 0$. Considerando

$$\frac{f(x, 0)}{x} = \frac{\sin(|x|^\alpha)}{x^3}$$

si ottiene che tale limite esiste per $x \rightarrow 0$ se e solo se $\alpha > 3$. Quindi condizione necessaria alla differenziabilità su \mathbb{R}^2 è $\alpha > 3$. Sotto tale condizione, abbiamo quindi che esiste anche $\partial_x f(0, 0) = 0$. Per $\bar{y} \neq 0$, abbiamo inoltre che

$$\frac{f(x, \bar{y}) - f(0, \bar{y})}{x} = \frac{\sin(|x|^\alpha)}{x(x^2 + \bar{y}^2)} \rightarrow 0$$

essendo $\alpha > 3 > 1$. Ne segue che esiste $\partial_x f(0, \bar{y}) = 0$ per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$. Studiamo per tali valori di α la differenziabilità nei punti $(0, \bar{y})$. Nel caso $\bar{y} = 0$, abbiamo

$$\left| \frac{f(x, y)}{|z|} \right| = \left| \frac{\sin(|x|^\alpha)}{|z|^3} \right| \leq |1 + o(1)| |z|^{\alpha-3} \rightarrow 0$$

per $z \rightarrow 0$. Quindi f è differenziabile nell'origine con differenziale nullo. Per $\bar{y} \neq 0$ si ha

$$\left| \frac{f(x, y) - f(0, \bar{y})}{|(x, y - \bar{y})|} \right| = \left| \frac{\sin(|x|^\alpha)}{\sqrt{x^2 + |y - \bar{y}|^2} |z|^2} \right| \leq \frac{|1 + o(1)|}{|z|^2} |x|^{\alpha-1} \rightarrow 0$$

per $z \rightarrow (0, \bar{y})$. Quindi f è differenziabile in \mathbb{R}^2 se e solo se $\alpha > 3$. Si osserva inoltre che per $\alpha > 3$ le derivate parziali sono continue in \mathbb{R}^2 , ovvero $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Infatti abbiamo

$$|f_x| = |z|^{-4} \left\{ \alpha |x|^{\alpha-1} \cos(|x|^\alpha) \operatorname{sgn}(x) |z|^2 - 2x \sin(|x|^\alpha) \right\} \leq \frac{\alpha |x|^{\alpha-1}}{|z|^2} + 2|1 + o(1)| \frac{|x|^{\alpha+1}}{|z|^4}$$

ove gli ultimi addendi sono infinitesimi per $\alpha > 3$ e $z \rightarrow (0, \bar{y})$ per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$|f_y| = \left| \frac{2y \sin(|x|^\alpha)}{|z|^4} \right| \leq 2|1 + o(1)| \frac{|x|^\alpha}{|z|^3}$$

ove l'ultimo termine è infinitesimo per $\alpha > 3$ e $z \rightarrow (0, \bar{y})$ per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri $f(x, y) = e^{-y^2 + \sin x}$ definita su \mathbb{R}^2 .

- (1) Calcolare $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.
- (2) Stabilire se f ha massimo o minimo globali.
- (3) Studiare i punti critici di f determinando in particolare eventuali punti di massimo o minimo locali.

SVOLGIMENTO. Abbiamo $f \leq e$, inoltre $f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e$, quindi per ogni $k \in \mathbb{Z}$ vale

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \max_{\mathbb{R}^2} f = f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e$$

mentre $\lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$ implica che $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$. Pertanto $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

prova che f non ha minimo in \mathbb{R}^2 . Abbiamo $\partial_x f = (\cos x)e^{-y^2 + \sin x}$ e $\partial_y f = -2ye^{-y^2 + \sin x}$, quindi i punti critici sono

$$p_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right), \quad \text{ove } k \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo inoltre che

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f(x, y) &= (\cos^2 x - \sin x)e^{-y^2 + \sin x} & \partial_{xy}^2 f(x, y) &= -2y(\cos x)e^{-y^2 + \sin x} \\ \partial_y^2 f(x, y) &= (4y^2 - 2)e^{-y^2 + \sin x}. \end{aligned}$$

Si ha pertanto che

$$D^2 f(p_k) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} e^{(-1)^k} & 0 \\ 0 & -2e^{(-1)^k} \end{pmatrix}$$

Quindi gli autovalori λ_1, λ_2 soddisfano le eguaglianze

$$\lambda_1 = (-1)^{k+1} e^{(-1)^k} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -2e^{(-1)^k}.$$

Se k è pari si ha $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, mentre per k dispari $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Quindi i punti p_{2k} sono di massimo locale, inoltre $f(p_{2k}) = e$, quindi tali punti sono anche di massimo globale. I punti p_{2k+1} sono di sella. Non si hanno quindi punti di minimo locale.

Esercizio 3. Si consideri il campo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le cui componenti sono

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= e^{-x^2 - y^2} \left(y \cos(xy) + ax \sin(xy) \right), \\ F_2(x, y) &= e^{-x^2 - y^2} \left(x \cos(xy) + ay \sin(xy) \right). \end{aligned}$$

- (1) Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che F sia conservativo.
 (2) Si consideri la curva $\gamma :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come segue

$$\gamma(t) = \begin{cases} (te^{t^2} \cos t, t^3 \sin t) & \text{se } t < 0 \\ \left(t\pi + te^{1/(t-1)} \cos\left(\frac{1}{1-t}\right), \frac{t}{2} + te^{1/(t-1)} \sin\left(\frac{1}{1-t}\right) \right) & \text{se } 0 \leq t < 1 \end{cases} .$$

Per i valori di a determinati al punto precedente stabilire se il lavoro di F lungo γ converge e nel caso calcolarlo.

SVOLGIMENTO. Calcolando le derivate parziali si ha

$$\begin{aligned} \partial_y F_1 &= e^{-|z|^2} (-2y^2 \cos(xy) - 2axy \sin(xy) + \cos(xy) - xy \sin(xy) + ax^2 \cos(xy)) \\ \partial_x F_2 &= e^{-|z|^2} (-2x^2 \cos(xy) - 2axy \sin(xy) + \cos(xy) - xy \sin(xy) + ay^2 \cos(xy)) \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza si ottiene la condizione necessaria $a = -2$. Quindi per $a = -2$ si ha un potenziale essendo \mathbb{R}^2 semplicemente connesso, ovvero F è conservativo se e solo se $a = -2$. Integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^x F_1(t, y) dt &= \int_0^x e^{-t^2-y^2} y \cos(ty) dt - 2 \int_0^x te^{-t^2-y^2} \sin(ty) dt \\ &= \sin(xy) e^{-x^2-y^2} . \end{aligned}$$

Quindi se f è una primitiva di F , abbiamo $f(x, y) - f(0, y) = \sin(xy) e^{-x^2-y^2}$, inoltre

$$f(0, y) = f(0, 0) + \int_0^y F_2(0, t) dt = f(0, 0) .$$

Ponendo $f(0, 0) = 0$, otteniamo la primitiva $f(x, y) = \sin(xy) e^{-x^2-y^2}$. Infine essendo F conservativo per $a = -2$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_\gamma F &= \lim_{a \rightarrow -\infty} f(\gamma(0)) - f(\gamma(a)) + \lim_{b \rightarrow 1} f(\gamma(b)) - f(\gamma(0)) \\ &= \lim_{b \rightarrow 1} f(\gamma(b)) = f(\pi, 2^{-1}) = e^{-\pi^2 - \frac{1}{4}} . \end{aligned}$$

Ciò segue dal fatto che $|\gamma(t)| \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow -\infty$ in quanto

$$|\gamma(t)|^2 \geq \min\{t^2 e^{2t^2} + t^6\} \rightarrow +\infty \quad \text{per } t \rightarrow -\infty .$$

Esercizio facoltativo Si consideri una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e l'insieme chiuso dei punti $T \subset \mathbb{R}^2$ corrispondenti ad un triangolo avente l'origine di \mathbb{R}^2 come punto interno. Si supponga che per ogni punto x appartenente alla frontiera di T si abbia

$$\langle \nabla f(x), x \rangle \geq 0 .$$

Provare che f ha almeno un punto critico.

SVOLGIMENTO. Supponiamo si abbia la disuguaglianza stretta $\langle \nabla f(x), x \rangle > 0$ per i punti x della frontiera di T . Ne segue che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tx) - f(x)}{t} = \partial_x f(x) = \langle \nabla f(x), x \rangle > 0.$$

Poichè il segmento $\{tx : t \in [0, 1]\}$ è contenuto in T , abbiamo che $f(tx) < f(x)$ per $t \in]1 - \varepsilon, 1[$ ed $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Quindi il minimo assoluto di f su T deve essere interno a tale insieme, ove il gradiente si annulla. Consideriamo il caso con la disuguaglianza non stretta e si consideri $f_\varepsilon(x) = \varepsilon|x|^2 + f(x)$, ove

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(x+tx) - f_\varepsilon(x)}{t} = \langle \nabla f(x), x \rangle + 2\varepsilon \langle x, x \rangle > 0,$$

pertanto esiste un minimo assoluto x_ε interno a T ove si ha $\nabla f_\varepsilon(x_\varepsilon) = 0$, quindi

$$\nabla f(x_\varepsilon) = -2\varepsilon x_\varepsilon.$$

Prendendo una successione convergente $x_{\varepsilon_p} \rightarrow \xi \in T$ e usando la continuità di ∇f si conclude.