

Preesame di Analisi Matematica III del 17 Dicembre 2009.

Università di Pisa. Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2009/2010.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Sia $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1\}$ e sia $f(x, y, z, t) = xyz - t$. Determinare massimo e minimo di f su D .

SVOLGIMENTO. Abbiamo $\nabla f(x, y, z, t) = (yz, xz, xy, -1)$ che non si annulla in alcun punto, pertanto massimo e minimo di f non possono essere nella parte interna di D . Consideriamo quindi il sistema

$$\begin{cases} yz = \lambda x \\ xz = \lambda y \\ xy = \lambda z \\ -1 = \lambda t \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \end{cases} .$$

Osserviamo innanzitutto che deve essere $\lambda \neq 0$. Dalle prime tre equazioni del sistema, considerando le variabili x, y e z si osserva che se una di esse si annulla, allora si annullano anche le rimanenti due. Dalla quinta equazione si hanno le soluzioni $(0, 0, 0, \pm 1)$. Altrimenti le prime tre coordinate devono essere tutte non nulle. Da questo si può dedurre dalle prime tre equazioni che $x^2 = y^2 = z^2 = \lambda^2$ e quindi la quarta e la quinta equazione danno

$$3\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = 1,$$

ovvero $3\lambda^4 - \lambda^2 + 1 = 0$. Tale equazione non ha soluzioni reali. Si conclude che

$$\max_D f = f(0, 0, 0, -1) = 1 \quad \text{e} \quad \min_D f = f(0, 0, 0, 1) = -1.$$

Esercizio 2. Si consideri $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < x^2 + y^2 < 1\}$ e sia

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + (\tan z)^2)^\alpha}.$$

Si determinino tutti e soli gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia integrabile su E .

SVOLGIMENTO. Poichè f è non negativa, posto $B = \{x, y \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ abbiamo

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = 2 \int_B \left(\int_0^{x^2+y^2} \frac{dz}{(x^2 + y^2 + (\tan z)^2)^\alpha} \right) dx dy.$$

Utilizzando le coordinate polari per (x, y) lo studio della convergenza richiesto equivale a studiare la convergenza del seguente

$$\int_0^1 \rho \left(\int_0^{\rho^2} \frac{dz}{(\rho^2 + (\tan z)^2)^\alpha} \right) d\rho.$$

Poniamo $z = \arctan(\rho s)$, ottenendo il seguente

$$\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-2}} \int_0^{(\tan \rho^2)/\rho} \frac{1}{(1+s^2)^\alpha (1+\rho^2 s^2)} ds.$$

La funzione $\rho \rightarrow \frac{\tan \rho^2}{\rho}$ è limitata su $]0, 1[$ e la funzione $(1+s^2)^{-\alpha}$ è limitata sugli insiemi limitati, pertanto il precedente integrale si può stimare dall'alto e dal basso con il seguente

$$\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-2}} \int_0^{(\tan \rho^2)/\rho} \frac{1}{(1+\rho^2 s^2)} ds$$

moltiplicato per un'opportuna costante. Tale integrale è uguale a $\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-3}} d\rho$, pertanto si ha convergenza se e solo se $\alpha < 2$,

Esercizio 3. Sia $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < 1, t > 0\}$ e sia

$$f(x, y, z, t) = \frac{tx^2}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

Calcolare $\int_A f(x, y, z, t) dx dy dz dt$.

SVOLGIMENTO. Utilizziamo le coordinate sferiche per (x, y, z) , ottenendo il seguente

$$\int_{\tilde{A}} \frac{t\rho^4 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi}{\rho^2 + t^2} d\rho d\theta d\varphi dt$$

ove $\tilde{A} = \{(\rho, \theta, \varphi, t) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\times]0, +\infty[: \rho^2 + t^2 < 1\}$. Definendo l'insieme $C = \{(\rho, t) \in]0, +\infty[^2 : \rho^2 + t^2 < 1\}$ il precedente integrale risulta uguale a

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_C \frac{t\rho^4}{t^2 + \rho^2} d\rho dt.$$

Abbiamo

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (\sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

ed inoltre $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$. Rimane da considerare

$$\int_C \frac{t\rho^4}{t^2 + \rho^2} d\rho dt = \int_0^1 \rho^4 \left(\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{t}{t^2 + \rho^2} dt \right) d\rho = \int_0^1 \rho^4 \frac{\log(t^2 + \rho^2)}{2} \Big|_{t=0}^{t=\sqrt{1-\rho^2}} d\rho$$

pertanto tale integrale è uguale all' integrale improprio $-\int_0^1 \rho^4 \log \rho d\rho$. Tale integrale si può calcolare per parti

$$-\int_0^1 \rho^4 \log \rho d\rho = \frac{1}{5} \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{1}{25}.$$

Raccogliendo i calcoli precedenti ne segue che

$$\int_A f(x, y, z, t) dx dy dz dt = \frac{4}{75} \pi.$$

Esercizio facoltativo Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 la cui frontiera è una ipersuperficie di classe C^∞ e siano A e B due punti di \mathbb{R}^3 tali che il segmento che li congiunge non intersechi $\overline{\Omega}$. Supponiamo che in A sia posta una sorgente luminosa e che la frontiera di Ω sia perfettamente riflettente. Si provi che esiste un raggio luminoso emesso da A che giunge in B riflettendosi sulla frontiera di Ω , mostrando che:

- (1) esiste una curva poligonale di minima lunghezza che congiunge A a B toccando la frontiera di Ω ,
- (2) supponendo che la luce percorra con velocità scalare costante tale curva, si mostri che nel punto di riflessione la componente tangente della velocità vettoriale si mantiene costante, mentre la componente normale cambia di segno.