Primo appello di Analisi Matematica III dell' 8 Gennaio 2010.

Università di Pisa. Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2009/2010.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x,y) = y(1+\cos x) + e^y(1+\sin x)$. Si provi che esiste un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ ed una funzione $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che l'insieme $\Sigma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ sia il grafico di φ.

SVOLGIMENTO. Abbiamo che $\partial_y f(x,y) = 1 + \cos x + e^y(1+\sin x) > 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ciò è immediato se $\cos x \neq -1$, mentre in caso di uguaglianza si ha $\sin x = 0$, quindi $\partial_y f(x,y) = e^y > 0$. Definiamo $x_k = \pi + 2k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e $A = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Si ha $\cos x = -1$ se e solo se $x \in A$. Pertanto $f(x,y) = e^y > 0$ per ogni $x \in A$. Ciò prova che $\Sigma \cap A \times \mathbb{R} = \emptyset$. Mentre per ogni $x \in E = \mathbb{R} \setminus A$ abbiamo

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = +\infty \qquad \lim_{y\to-\infty} = -\infty$$

quindi essendo $y \to f(x,y)$ continua e strettamente crescente, esiste un unico $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ tale che $f(x,\varphi(x)) = 0$, quindi per ogni $x \in E$ esiste un unico $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ tale che $(x,\varphi(x)) \in \Sigma$. Abbiamo provato che $\Sigma = \mathrm{gr}\varphi$. Inoltre $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 per il teorema della funzione implicita.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme

$$E = \{(u,v,z) : e^{u^2} < v,\ \frac{u-v}{2} < z < \frac{u+v}{2}\}$$

e la funzione $f(u,v,z) = uv\, e^{-(u^2+v^2)}$. Studiare l'integrabilità di f su E, cioè si stabilisca se $\displaystyle\int_E |f(u,v,z)|\, dudvdz < +\infty$. Nel caso f sia integrabile su E, si determini $\displaystyle\int_E f(u,v,z)\, dudvdz$.

SVOLGIMENTO. Considerando il modulo di f abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_E |u|\, v\, e^{-u^2-v^2}\, dudvdz &= \int_1^{+\infty} v\, e^{-v^2}\Big(\int_{-\sqrt{\log v}}^{\sqrt{\log v}} |u|\, e^{-u^2} \int_{\frac{u-v}{2}}^{\frac{u+v}{2}} dz\Big) dv \\
&= \int_1^{+\infty} v^2\, e^{-v^2}\Big(\int_{-\sqrt{\log v}}^{\sqrt{\log v}} |u|\, e^{-u^2}\Big) dv \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} (\sqrt{u^2+v^2})^3\, e^{-u^2-v^2}\, dudv \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^4\, e^{-\rho^2}\, d\rho < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Essendo f integrabile possiamo applicare il Teorema di Fubini, ottenendo

$$\begin{aligned}\int_E u\,v\,e^{-u^2-v^2}\,dudvdz &= \int_1^{+\infty} v\,e^{-v^2}\Big(\int_{-\sqrt{\log v}}^{\sqrt{\log v}} u\,e^{-u^2}\int_{\frac{u-v}{2}}^{\frac{u+v}{2}} dz\Big)dv \\ &= \int_1^{+\infty} v^2\,e^{-v^2}\Big(\int_{-\sqrt{\log v}}^{\sqrt{\log v}} u\,e^{-u^2}\Big)dv = 0\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) = x\,\log(x^2+y^2+z^2)$$

e si consideri l'insieme $C = \{(x,y,z) : 0 < x \le 1,\, (y-1)^2+z^2 \le 1\}$. Stabilire se f ha massimo e minimo su C e nel caso determinarli.

Svolgimento. Si noti che la funzione f si può estendere con continuità a tutto $\mathbb{R}^3$, ove si annulla nel piano $\{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$, quindi anche f ha massimo e minimo su C, che coincidono con quelli dell'estensione sulla chiusura di C. Abbiamo

$$\begin{cases} \partial_x f = \log(x^2+y^2+z^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2+z^2} \\ \partial_y f = \dfrac{2xy}{x^2+y^2+z^2} \\ \partial_z f = \dfrac{2xz}{x^2+y^2+z^2} \end{cases},$$

pertanto i punti di annullamento del gradiente sono $(0,y,z)$, ove $y^2+z^2=1$ e $(\pm 1/e, 0, 0)$. Notiamo che f si annulla nei primi e vale $\mp 2/e$ nei secondi, inoltre $(1/e,0,0)$ appartiene alla frontiera di C. Studiamo l'esistenza di altri possibili punti critici su tale frontiera. La parte di tale frontiera nel piano $\{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$ non necessita di essere considerata in quanto ivi f si annulla. Studiamo le soluzioni in una parte di frontiera determinata dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \log(x^2+y^2+z^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2} = 0 \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2+z^2} = 2\lambda(y-1) \\ \dfrac{2xz}{x^2+y^2+z^2} = 2\lambda z \\ (y-1)^2+z^2 = 1, \quad 0 < x < 1 \end{cases},$$

per $\lambda \neq 0$. Se $z=0$, allora $y = 1 \pm 1$. Nel caso $y=0$ abbiamo una contraddizione con la seconda equazione. Nel caso $y=2$ la prima equazione implica la seguente disequazione

$$\log(x^2+4) = -\frac{2x^2}{x^2+4} < 0$$

che non ha soluzione. Se $z \neq 0$, allora la seconda e terza equazione danno l'equazione impossibile $y = y-1$, pertanto non ci sono soluzioni su tale porzione di frontiera. Rimane da considerare la porzione di frontiera che interseca il piano $\{(1,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$, ove conviene considerare la restrizione $g(y,z) = f(1,y,z) = \log(1+y^2+z^2)$ sui punti definiti dalla disequazione $(y-1)^2+z^2 \le 1$. La funzione g non ha punti critici nella parte interna definita da $(y-1)^2+z^2<1$, rimangono quindi da considerare i punti critici sulla circonferenza di equazione $(y-1)^2+z^2=1$. Abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{1+y^2+z^2} = 2\lambda(y-1) \\ \dfrac{2z}{1+y^2+z^2} = 2\lambda z \\ (y-1)^2+z^2=1 \end{cases}$$

che ha l'origine per soluzione quando $\lambda = 0$. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Se $z \neq 0$ la prima e seconda equazioni danno l'equazione impossibile $y = y-1$, pertanto non ci sono soluzioni. Se $z = 0$, la terza e la prima equazione implicano $y = 2$. Abbiamo che il valore minimo tra quelli critici è $f(1/e, 0, 0 = -2/e$, mentre quello massimo è $f(1,2,0) = \log 5$, i quali pertanto corrispondono rispettivamente al minimo e al massimo di f.