

## Secondo appello di Analisi Matematica III del 29 Gennaio 2010.

Università di Pisa. Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2009/2010.

### SVOLGIMENTO

**Esercizio 1.** Si consideri l'insieme

$$E_\alpha = \{(x, y, z, t) : x > 0, y^2 + z^2 + t^2 < \frac{1}{x^{2\alpha}} \leq 1\}$$

e la funzione  $f(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{(y^2 + z^2 + t^2)} \log\left(\frac{y^2 + z^2 + t^2}{x}\right)$ . Al variare di  $\alpha > 0$ , si determinino quelli per cui  $f$  sia integrabile su  $E_\alpha$ . Per tali valori si calcoli  $\int_{E_\alpha} f(x, y, z, t) dx dy dz dt$ .

SVOLGIMENTO La funzione  $f$  è sempre non positiva su  $E_\alpha$  per ogni  $\alpha > 0$ . Pertanto l'integrale è definito e si hanno le sole due possibilità: può essere  $-\infty$  oppure convergente. Utilizzando le coordinate sferiche, e tenendo conto che  $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$ , abbiamo

$$\int_{E_\alpha} f(x, y, z) dx dy dz = 4\pi \int_1^{+\infty} \int_0^{x^{-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{x}} \log(\rho^2 x^{-1}) d\rho.$$

Con il cambio di variabile  $\rho = \sqrt{x}t$  abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha} f(x, y, z) dx dy dz &= 8\pi \int_1^{+\infty} \left( \int_0^{x^{-\alpha-\frac{1}{2}}} \log t dt \right) dx \\ &= 8\pi \int_1^{+\infty} \left( x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \log x^{-\alpha-\frac{1}{2}} - x^{-\alpha-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= -8\pi \left\{ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\log x^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}} dx \right\}. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale converge se e solo se  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Integrando per parti, per tali valori abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha} f(x, y, z) dx dy dz &= -8\pi \left\{ \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2}} + \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}} dx \right\} \\ &= -8\pi \left\{ \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2}} + \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\alpha - \frac{1}{2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}} dx \right\} \\ &= -\frac{16\pi\alpha}{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.** Si consideri l'insieme

$$E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} + (z-1)^2 \leq 1\}$$

Si determinino i punti di  $E$  aventi massima distanza dall'origine.

**SVOLGIMENTO.** Occorre massimizzare la funzione distanza sull'insieme  $E$ . Ciò equivale a massimizzare  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  su tale insieme. Questa funzione non ha punti critici fuori dall'origine, che appartiene ad  $E$ . Quindi il valore massimo, che esiste in quanto  $E$  è compatto, sarà assunto sulla frontiera  $\partial E$  di  $E$ . Tale insieme è una superficie regolare in quanto coincide con  $g^{-1}(0)$ , dove  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} + (z-1)^2 - 1$  e

$$\nabla g(x, y, z) = \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{3}, 2(z-1) \right)$$

non è mai nullo su  $g^{-1}(0)$ . Dal teorema dei moltiplicatori di Lagrange, le coordinate del punto di massima distanza soddisfano il seguente sistema

$$(1) \quad \begin{cases} x = \lambda x/4 \\ y = \lambda y/6 \\ z = \lambda(z-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$$

dove  $\lambda \neq 0$ . Inoltre la terza equazione implica che  $\lambda \neq 1$  e  $z = \lambda/(\lambda-1) \neq 0$ . Pertanto nel caso  $x = y = 0$ , il vincolo di superficie implica che  $z = 2$ . Una prima soluzione del sistema è il punto  $A = (0, 0, 2)$ , per cui  $\text{dist}(A, 0) = \|A\| = 2$ . Nel caso  $x \neq 0$  si ha  $\lambda = 4$ , quindi  $z = 4/3$  e la seconda equazione impone che  $y = 0$ . Il vincolo di superficie dà l'equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{9} = 1,$$

quindi otteniamo due soluzioni  $B_{\pm} = \left( \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{4}{3} \right)$ . Abbiamo quindi

$$\text{dist}(B_+, 0) = \text{dist}(B_-, 0) = \frac{4}{\sqrt{3}} > 2.$$

L'ultimo caso corrisponde a  $y \neq 0$ , che implica  $\lambda = 6$ ,  $x = 0$  e quindi  $z = 6/5$ . In questo caso il vincolo di superficie dà l'equazione

$$\frac{y^2}{6} + \frac{1}{25} = 1,$$

che produce le soluzioni  $C_{\pm} = \left( 0, \pm \frac{12}{5}, \frac{6}{5} \right)$ . Abbiamo quindi

$$\text{dist}(C_+, 0) = \text{dist}(C_-, 0) = \frac{6}{\sqrt{5}} > \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ne segue che i punti  $C_+$  e  $C_-$  sono i soli punti in  $E$  aventi massima distanza dall'origine.

**Esercizio 3.** Sia  $f(x, y) = x^2 e^{y^3} + (x - 1)^2 y$  e si consideri l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}.$$

- (1) Si provi che esiste un sottoinsieme  $E \subset \mathbb{R}$  ed una funzione  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che l'insieme  $\Sigma$  sia il grafico di  $\varphi$ .
- (2) Si provi che l'intersezione  $\Sigma \cap [0, 1] \times \mathbb{R}$  è l'immagine di una curva iniettiva  $\gamma$  di classe  $C^1$ .
- (3) Si consideri il seguente campo continuo

$$F(x, y) = \left( \frac{1}{1 + |y|}, \frac{x - 1}{(1 + |y|)^2} \right).$$

Scelto su  $\gamma$  un verso di percorrenza, si determini il lavoro  $\int_{\gamma} F d\gamma$ .

**SVOLGIMENTO.** Si osserva che  $\partial_y f(x, y) > 0$  se e solo se  $(x, y) \neq (1, 0)$ , quindi la funzione  $f(x, \cdot)$  è strettamente crescente per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Inoltre  $f(1, y) > 0$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$  e  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = \pm\infty$  per ogni  $x \neq 1$ . Quindi per ogni  $x \neq 1$  esiste un solo valore  $\varphi(x) \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x, \varphi(x)) = 0$ . Abbiamo quindi definito una funzione  $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  il cui grafico coincide con  $\Sigma$ . Questo in particolare mostra che  $\Sigma \cap (\{1\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$ , pertanto l'intersezione richiesta è l'immagine della restrizione della funzione grafico all'intervallo  $[0, 1[$ , ovvero  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(x) = (x, \varphi(x))$ . Osserviamo inoltre che

$$\varphi(x) = -\frac{x e^{\varphi(x)^3}}{(x - 1)^2} \leq 0,$$

pertanto il campo  $F$  ristretto alla curva corrisponde alla funzione differenziabile

$$F(x, y) = \left( \frac{1}{1 - y}, \frac{x - 1}{(1 - y)^2} \right).$$

Si osserva facilmente che un potenziale per  $F$  è dato dalla funzione

$$V(x, y) = \frac{x - 1}{1 - y}.$$

Osserviamo innanzitutto che  $\varphi$  è non positiva, pertanto

$$|V(x, \varphi(x))| = \frac{|x - 1|}{1 - \varphi(x)} \leq 1 - x.$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \lim_{x \rightarrow 1^-} V(x, \varphi(x)) - V(0, 0) = 1.$$