Preesame di Analisi Matematica III del 3 Novembre 2009.

Università di Pisa. Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2009/2010.

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(|x|^\alpha)}{x^2+y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

(1) Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua in $\mathbb{R}^2$.
(2) Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
(3) Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f appartenga a $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 2. Si consideri $f(x,y) = e^{-y^2+\sin x}$ definita su $\mathbb{R}^2$.
(1) Calcolare $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.
(2) Stabilire se f ha massimo o minimo globali.
(3) Studiare i punti critici di f determinando in particolare eventuali punti di massimo o minimo locali.

Esercizio 3. Si consideri il campo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ le cui componenti sono

$$F_1(x,y) = e^{-x^2-y^2}\Big(y\cos(xy) + ax\sin(xy)\Big),$$
$$F_2(x,y) = e^{-x^2-y^2}\Big(x\cos(xy) + ay\sin(xy)\Big).$$

(1) Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che F sia conservativo.
(2) Si consideri la curva $\gamma :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come segue

$$\gamma(t) = \begin{cases} (te^{t^2}\cos t, t^3 \sin t) & \text{se } t < 0 \\ \left(t\pi + te^{1/(t-1)}\cos\left(\dfrac{1}{1-t}\right), \dfrac{t}{2} + te^{1/(t-1)}\sin\left(\dfrac{1}{1-t}\right)\right) & \text{se } 0 \leq t < 1 \end{cases} .$$

Per i valori di a determinati al punto precedente stabilire se il lavoro di F lungo γ converge e nel caso calcolarlo.

Esercizio facoltativo Si consideri una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e l'insieme chiuso dei punti $T \subset \mathbb{R}^2$ corrispondenti ad un triangolo avente l'origine di $\mathbb{R}^2$ come punto interno. Si supponga che per ogni punto x appartenente alla frontiera di T si abbia

$$\langle \nabla f(x), x \rangle \geq 0.$$

Provare che f ha almeno un punto critico.