

Preesame di Analisi Matematica III del 17 Dicembre 2009.

Università di Pisa. Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2009/2010.

Esercizio 1. Sia $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1\}$ e sia $f(x, y, z, t) = xyz - t$. Determinare massimo e minimo di f su D .

Esercizio 2. Si consideri $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < x^2 + y^2 < 1\}$ e sia

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + (\tan z)^2)^\alpha}.$$

Si determinino tutti e soli gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia integrabile su E .

Esercizio 3. Sia $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < 1, t > 0\}$ e sia

$$f(x, y, z, t) = \frac{tx^2}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

Calcolare $\int_A f(x, y, z, t) dx dy dz dt$.

Esercizio facoltativo. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 la cui frontiera è una ipersuperficie di classe C^∞ e siano A e B due punti di \mathbb{R}^3 tali che il segmento che li congiunge non intersechi $\overline{\Omega}$. Supponiamo che in A sia posta una sorgente luminosa e che la frontiera di Ω sia perfettamente riflettente. Si provi che esiste un raggio luminoso emesso da A che giunge in B riflettendosi sulla frontiera di Ω , mostrando che:

- (1) esiste una curva poligonale di minima lunghezza che congiunge A a B toccando la frontiera di Ω ,
- (2) supponendo che la luce percorra con velocità scalare costante tale curva, si mostri che nel punto di riflessione la componente tangente della velocità vettoriale si mantiene costante, mentre la componente normale cambia di segno.