Secondo appello di Analisi Matematica III del 29 Gennaio 2010.

Università di Pisa. Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2009/2010.

Esercizio 1. Si consideri l'insieme

$$E_\alpha = \{(x,y,z,t) : x > 0,\ y^2 + z^2 + t^2 < \frac{1}{x^{2\alpha}} \leq 1\}$$

e la funzione $f(x,y,z,t) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \dfrac{1}{(y^2+z^2+t^2)} \log\left(\dfrac{y^2+z^2+t^2}{x}\right)$. Si determinino tutti i valori $\alpha > 0$ tali che f sia integrabile su E_α. Per tali valori si calcoli $\displaystyle\int_{E_\alpha} f(x,y,z,t)\, dxdydzdt$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme

$$E = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} + (z-1)^2 \leq 1\}.$$

Si determinino i punti di E aventi massima distanza dall'origine.

Esercizio 3. Sia $f(x,y) = x^2\, e^{y^3} + (x-1)^2\, y$ e si consideri l'insieme

$$\Sigma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}\,.$$

(1) Si provi che esiste un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ ed una funzione $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che l'insieme Σ sia il grafico di φ.
(2) Si provi che l'intersezione $\Sigma \cap [0,1] \times \mathbb{R}$ è l'immagine di una curva iniettiva γ di classe C^1.
(3) Si consideri il seguente campo continuo

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{1+|y|}, \frac{x-1}{(1+|y|)^2}\right)\,.$$

Scelto su γ un verso di percorrenza, si determini il lavoro $\int_\gamma F\, d\gamma$.

Quinto appello di Analisi Matematica II del 29 Gennaio 2010.

Università di Pisa. Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2009/2010.

Esercizio 1. Si studino tutte le soluzioni dell'equazione
$$u'[u + (u-1)^2] = u(u-1)^2$$
e se ne tracci il grafico.

Esercizio 2. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione
$$x\,u'(x) + 7u(x) = x^3\,.$$
Si stabilisca se esiste una soluzione definita su tutta la retta reale.

Esercizio 3. Si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - e^{1/n^\alpha} \right\}$$
al variare del parametro $\alpha > 0$. Si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2+x^{2n}}\right)$$
al variare di x in $\mathbb{R}$.