Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Appello di Analisi Matematica I del 9-6-2014. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \lambda e^{a_n} \\ a_0 = 0 \end{cases} .$$

a) Per quali valori del parametro $\lambda \geq 0$ la successione (a_n) converge a un numero reale?
b) Quali sono i valori possibili di $\lim_{n\to\infty} a_n$ al variare di $\lambda \geq 0$?

Soluzione. Qualunque sia $\lambda \geq 0$, la funzione $f(x) := \lambda e^x$ è crescente e continua; inoltre $a_0 = 0 \leq \lambda = a_1$. In questa situazione, come è noto, la successione (a_n) delle iterate di f converge al *minimo punto fisso non-negativo di f, se ve n'è almeno uno, altrimenti diverge a $+\infty$*. I punti fissi di f sono le soluzioni dell'equazione $xe^{-x} = \lambda$. Dallo studio della funzione $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = xe^{-x}$ risulta che essa è strettamente crescente nell'intervallo $[0, 1]$ con $g([0, 1]) = [0, 1/e]$, ed è decrescente sull'intervallo $[1, +\infty)$ con $g([1, +\infty)) = (0, 1/e]$. Ne segue che: **a)** la successione (a_n) converge a un numero reale se e solo se l'equazione $g(x) = \lambda$ ammette soluzione, e quindi se e solo se $0 \leq \lambda \leq 1/e$; inoltre **b)** al variare di λ in tale intervallo la minima soluzione di $g(x) = \lambda$ descrive l'intervallo $[0, 1]$, e quindi quest'ultimo è l'insieme dei numeri reali che sono limite delle successioni a_n, mentre per $\lambda > 1/e$, come detto, il limite è sempre $+\infty$.

Esercizio 2. Calcolare il massimo valore dell'integrale definito

$$\int_a^b \frac{\cos x}{\sin^2 x + 6\sin x + 10}\, dx$$

al variare degli estremi di integrazione $a < b$ in $\mathbb{R}$.

Soluzione.

Con il cambio di variabile $x = \sin t$ si trova

$$\int_a^b \frac{\cos t}{\sin^2 t + 6\sin t + 10}\, dt = \int_{\sin a}^{\sin b} \frac{1}{x^2 + 6x + 10}\, dx = \int_{\sin a}^{\sin b} \frac{1}{(x+3)^2 + 1}\, dx$$

$$= \Big[\arctan(x+3)\Big]_{\sin a}^{\sin b} = \arctan(\sin b + 3) - \arctan(\sin a + 3)$$

Poiché la funzione arcotangente è crescente, questo valore massimo al variare di a e b quando rispettivamente $\sin b$ è massimo e $\sin a$ è minimo, e cio per $\sin b = 1$ e $\sin a = -1$, ad esempio $a = -\pi/2$ e $b = \pi/2$. Il corrispondente valore massimo dell'integrale è perciò $\arctan(4) - \arctan(2) = 0,218...$

Esercizio 3. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\cos(n)\log\cos(1/n)$$

Soluzione. Dallo sviluppo $\log\cos(x) = \log(1+O(x^2)) = O(x^2)$ per $x \to 0$, si ricava subito, ponendo $x = 1/n$,

$$\sqrt{n}\cos(n)\log\cos(1/n) = O(n^{-3/2}),$$

pertanto la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di termine $n^{-3/2}$.