

Programma del corso di *Teoria Geometrica della Misura*.

Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, a.a. 2022/2023.

- 1. Richiami sulle misure.** Misure, misure esterne e loro relazioni. Misure boreliane e misure di Radon. Misure vettoriali e loro variazione totale. Convergenza debole* di misure. Costruzione di Carathéodory, misura di Hausdorff e misura sferica.
- 2. Teoremi di ricoprimento e differenziabilità di misure.** Teoremi di ricoprimento di Vitali, relazione di Vitali, teorema di ricoprimento di Besicovitch in spazi metrici direzionalmente limitati, differenziabilità di misure rispetto a una relazione di Vitali, teorema di differenziabilità di Lebesgue in spazi metrici doubling, differenziabilità rispetto a misure asintoticamente doubling(*).
- 3. Frattali.** Insiemi di Cantor con parametro, frattali autosimili, varie costruzioni di frattali, calcolo della dimensione di Hausdorff di frattali, costruzione di Hutchinson.
- 4. Misura di Hausdorff e misura di Lebesgue.** Disuguaglianza di Brunn-Minkowski, disuguaglianza isodiametrica e uguaglianza tra misura di Hausdorff e misura di Lebesgue.
- 5. Proprietà fini di funzioni, approssimazione e differenziabilità.** Teoremi di Lusin e di Egorov. Teorema di Rademacher per funzioni di più variabili reali. Punti di densità di un insieme e unicità del differenziale. Nozioni di differenziabilità in spazi metrici(*). Spazi di Sobolev e funzioni a variazione limitata, teoremi di Meyers-Serrin e di Anzellotti-Giaquinta.
- 6. Elementi di algebra multilineare.** Multivettori, prodotto esterno, mappe alternanti, dualità tra multivettori e mappe alternanti, prodotto scalare tra multivettori, prodotto esterno iterato di una mappa lineare e suo jacobiano rispetto ad un prodotto scalare.
- 7. Calcoli di aree k-dimensionali e formula di coarea per mappe lipschitziane.** Teoremi di linearizzazione, trascurabilità dei valori singolari e formula dell'area per mappe lipschitziane tra spazi euclidei. Disuguaglianza di Eilenberg-Federer. Formule di area e di coarea per mappe vettoriali lipschitziane di più variabili reali.
- 8. Insiemi rettificabili.** Nozione di insieme rettificabile, spazi tangenti approssimati, misure tangenti, varie caratterizzazioni degli insiemi rettificabili.
- 9. Insiemi a perimetro finito.** Contenuto di Minkowski e disuguaglianza isoperimetrica. Disuguaglianza di immersione di Sobolev per funzioni lisce e disuguaglianza isoperimetrica con costante ottimale. Insiemi a perimetro finito, loro proprietà, teorema della divergenza per insiemi a perimetro finito e corrispondenti disuguaglianze isoperimetriche. Frontiera ridotta e teorema di rettificabilità di De Giorgi.
- 10. Cenni ad ulteriori sviluppi(*).** Nozione di corrente di De Rham, bordo e massa di una corrente e prime operazioni sulle correnti. Brevi cenni alle correnti metriche di De Giorgi, Ambrosio e Kirchheim e alla regolarità delle superfici minime.

Il simbolo (*) indica argomenti che possono essere ampliati con studi successivi.