Corso di Laurea in Fisica
Geometria I e II – Appello del 18/6/2003

Esercizio 1 (G1, G1+2, VO)

Sia U il sottospazio di R^4 descritto dalle equazioni $\begin{cases} x+2y-z+t &= 0 \\ y+2z-t &= 0 \end{cases}$ e, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $W_\lambda =$Span$\{\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2-\lambda \\ \lambda-1 \\ 1 \\ 1-3\lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2-\lambda \\ -1+\lambda \\ -1 \\ 3-3\lambda \end{vmatrix}\}$.

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = U \oplus W_\lambda$?

Esercizio 2 (G1)

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n, e sia W un sottospazio di V di dimensione m. Si consideri l'insieme

$$U = \{f : V \to V \text{ lineari tali che } \forall w \in W\ \exists \alpha \in \mathbb{K} : f(w) = \alpha w\}$$

Dimostrare che U è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(V, V)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 3 (G1, G1+2, VO)

Sia $A \in {}_n\mathbb{R}_n$ la matrice i cui coefficienti sono tutti uguali ad 1, e sia $D \in {}_n\mathbb{R}_n$ la matrice diagonale in cui l'elemento di posto (1,1) vale n, e tutti gli altri valgono 0. Dimostrare che la matrice A è simile alla matrice D.

Esercizio 4 (G1)

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$, definito rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

e sia $W =$Span$\{(0,1,0,1),(1,0,-1,0)\}$.

(1) Calcolare la segnatura di φ.
(2) Calcolare una base per $W^\perp$.
(3) Esibire un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione pari all'indice di positività di φ tale che la restrizione di φ a tale sottospazio sia definita positiva.

Esercizio 5 (G2, G1+2, VO)

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, definito rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

[0] Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II; VO = Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ descritto dall'equazione $x = y$, W =Span$\{\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}\}$, C il cono dei vettori φ-isotropi, Π_k il piano descritto dall'equazione $z = k$ $(k \in \mathbb{R})$.

(1) U e $W =$ sono φ-isometrici?
(2) Rappresentare tramite φ il funzionale $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definito da
$f\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}\right) = -3x + 4y + 3z.$
(3) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica data dall'intersezione di C e Π_k.

Esercizio 6 (G2, G1+2, VO)
Trovare una base di $\mathbb{R}_3[x]$ in cui la matrice associata all'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, definita da $F(p(x)) = p(0)x^3 + 6p'(x)$, coincida con la forma canonica di Jordan di F.

Esercizio 7 (G2)
Dimostrare che un trapezio è isoscele se e solo se le affinità che lo fissano sono isometrie.
Dimostrare che un triangolo è isoscele se e soltanto se tra le 6 affinità che lo fissano almeno 2 sono isometrie.

Corso di Laurea in Fisica
Geometria I e II – Appello del 18/6/2003

Esercizio 1 (G1, G1+2, VO)

Sia U il sottospazio di R^4 descritto dalle equazioni $\begin{cases} x+2y-z+t &= 0 \\ y+2z-t &= 0 \end{cases}$ e, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $W_\lambda =$Span$\{\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2-\lambda \\ \lambda-1 \\ 1 \\ 1-3\lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2-\lambda \\ -1+\lambda \\ -1 \\ 3-3\lambda \end{vmatrix}\}$.

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = U \oplus W_\lambda$?

Esercizio 2 (G1)

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n, e sia W un sottospazio di V di dimensione m. Si consideri l'insieme

$$U = \{f : V \to V \text{ lineari tali che } \forall w \in W \ \exists \alpha \in \mathbb{K} : f(w) = \alpha w\}$$

Dimostrare che U è un sottospazio di Hom(V, V) e calcolarne la dimensione.

Esercizio 3 (G1, G1+2, VO)

Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ la matrice i cui coefficienti sono tutti uguali ad 1, e sia $D \in M(n, \mathbb{R})$ la matrice diagonale in cui l'elemento di posto (1,1) vale n, e tutti gli altri valgono 0.

Dimostrare che la matrice A è simile alla matrice D.

Esercizio 4 (G1)

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$, definito rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

e sia $W =$Span$\{(0,1,0,1),(1,0,-1,0)\}$.

(1) Calcolare la segnatura di φ.
(2) Calcolare una base per $W^\perp$.
(3) Esibire un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che realizzi l'indice di positività di φ.

Esercizio 5 (G2, G1+2, VO)

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, definito nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II; VO = Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ descritto dall'equazione $x = y$, W =Span$\left\{\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}\right\}$. C il cono dei vettori φ-isotropi, Π_k il piano descritto dall'equazione $z = k$ $(k \in \mathbb{R})$.

(1) U e W = sono φ-isometrici?
(2) Rappresentare tramite φ il funzionale $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definito da
$f\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}\right) = -3x + 4y + 3z.$
(3) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica data dall'intersezione di C e Π_k.

Esercizio 6 (G2, G1+2, VO)
Trovare una base di $\mathbb{R}_3[x]$ in cui la matrice associata all'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, definita da $F(p(x)) = p(0)x^3 + 6p'(x)$, coincida con la forma canonica di Jordan di F.

Esercizio 7 (G2)
Dimostrare che un trapezio è isoscele se e solo se le affinità che lo fissano sono isometrie.
Dimostrare che un triangolo è isoscele se e soltanto se tra le 6 affinità che lo fissano almeno 2 sono isometrie.