GEOMETRIA DIFFERENZIALE 2020/21
ESERCIZI BISETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato svolgere gli esercizi a gruppi, purché alla fine ci sia una elaborazione e una scrittura totalmente individuale, e il lavoro di gruppo sia reso esplicito (basta aggiungere "ho fatto gli esercizi in collaborazione con XXX" nel testo). Si raccomanda di scrivere gli esercizi con cura: esercizi scritti in modo non chiaro non verranno corretti.

1. Esercizi del 7 novembre

Esercizio 1.1. Data una matrice quadrata A, sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 1.2. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 1.3. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Esercizio 1.4. Sia $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ una sfera di dimensione dispari. Considera il campo vettoriale tangente su S^{2n-1}:

$$X(x_1, \ldots, x_{2n}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2n}, -x_{2n-1}).$$

Verifica che è effettivamente un campo tangente per S^{2n-1}, mai nullo. Scrivi esplicitamente il flusso di questo campo e determina le sue linee integrali.

Notiamo che per un teorema generale su una sfera di dimensione pari (ad esempio S^2) non esistono campi vettoriali mai nulli.

Esercizio 1.5. Sia M una n-varietà, con atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_i \colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n\}$. Un atlante per il fibrato tangente TM si costruisce nel modo seguente:

$$\{\psi_i \colon \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^n\}.$$

Qui $\pi \colon TM \to M$ è la proiezione, indichiamo un punto di TM come una coppia (p, v) dove $p \in M$ e $v \in T_pM$, (quindi $\pi(p, v) = p$) e definiamo

$$\psi_i(p, v) = \big(\varphi_i, (d\varphi_i)_p(v)\big).$$

In questo modo TM è una $(2n)$-varietà. Mostra che l'atlante appena costruito per TM è sempre orientato. Quindi TM è sempre una varietà orientabile anche se M non lo è.

Esercizio 1.6. Sia M varietà qualsiasi e N varietà non orientabile. Il prodotto $M \times N$ può essere orientabile?

Esercizio 1.7. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2), localmente definite a meno di sommare $2\pi k$, e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera le 1-sottovarietà $\gamma_1 = \{1\} \times S^1$ e $\gamma_2 = S^1 \times \{1\}$, orientate come S^1. Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Esercizio 1.8. Sia $f \colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che il prodotto wedge commuta con il pull-back:

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

2. Esercizi del 21 novembre

Esercizio 2.1. Sia $f \colon U \to V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y^1, \ldots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Mostra che il pull-back di dx^i tramite f è la 1-forma

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

Esercizio 2.2. Sia $\varphi \colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$. Mostra che il pull-back commuta con il differenziale, cioè:

$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. $\square$

Esercizio 2.3. Completa la dimostrazione fatta a lezione del teorema di Stokes mostrando che $i^*(dx^{n+1}) = 0$ se $i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ è l'inclusione ovvia $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$.

Esercizio 2.4. Costruisci una possibile definizione rigorosa di varietà Lorentziana *time-orientable* (in particolare devi formalizzare il fatto che la scelta di un futuro ed un passato debba essere localmente coerente).

Esercizio 2.5. Mostra che le nozioni di orientabilità e time-orientabilità sono indipendenti, costruendo una struttura lorentziana time-orientable e una time-non orientable sia sul nastro di Möbius che sull'anello $S^1 \times [0, 1]$ (sono quindi quattro strutture in tutto). Puoi costruire queste strutture qualitativamente disegnando un cono di luce in T_pS che varia in modo liscio in $p \in S$ nei quattro casi (per risolvere l'esercizio sono sufficienti dei disegni convincenti, qui S è il nastro di Möbius o l'anello).

Esercizio 2.6. Mostra che $\delta\mathbf{F} = 0$ è equivalente alle due ultime equazioni di Maxwell.

Esercizio 2.7. Considera $\mathbb{R}^n$ munito del tensore metrico Euclideo $g_{ij} = \delta_{ij}$. Mostra che il codifferenziale δ di una k-forma è

$$\delta(f\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{\partial f}{\partial x^{i_j}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

Qui supponiamo che $i_1 < \cdots < i_k$.

In generale, il *Laplaciano* di una k-forma ω è la k-forma

$$\Delta(\omega) = (d\delta + \delta d)(\omega).$$

Mostra che se ω è una funzione in $\mathbb{R}^n$, sempre munito del tensore Euclideo, il Laplaciano di ω è l'usuale laplaciano (con segno opposto a quello usuale).

Esercizio 2.8. Sia V spazio vettoriale reale di dimensione n orientato e munito di un tensore metrico g. Mostra che la forma $\omega \in \Lambda^n(V)$ definita a lezione è effettivamente ben definita.

Esercizio 2.9. Siano V e ω come nell'esercizio precedente. Completa la buona definizione dell'operatore $*\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$, mostrando che effettivamente per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$ esiste un unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

per ogni $\alpha^k(V)$. Sulle mie note (a pagina 46) c'è una traccia della dimostrazione.

3. Esercizi del 5 dicembre

Esercizio 3.1. Considera lo spazio iperbolico nel modello del semispazio:

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x).$$

Qui g^E è il tensore euclideo. In altre parole

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij}.$$

Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana H^n:

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che la varietà riemanniana H^n è *omogenea*, cioè per ogni coppia di punti $p, q \in H^n$ esiste una isometria che manda p in q.

Esercizio 3.2. Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2.

Esercizio 3.3. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del sempiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le *trasformazioni di Möbius*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$ sono tutte isometrie di H^2 che preservano l'orientazione.

Esercizio 3.4. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico (B^n, g),

$$g(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 g^E(x)$$

dove g^E è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Determina la lunghezza (rispetto alla metrica iperbolica!) del segmento che congiunge 0 e tv per ogni $t \in (0, 1)$.

Esercizio 3.5. Costruisci una struttura Lorentziana sul toro $S^1 \times S^1$ che sia *omogenea*, cioè tale che per ogni coppia di punti $p, q \in H^n$ esista una isometria che manda p in q.

Esercizio 3.6. Scrivi il tensore metrico Euclideo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in coordinate polari (θ, ρ). Scrivi il tensore metrico di S^2 (indotto da quello euclideo di $\mathbb{R}^3$) in coordinate sferiche (φ, ψ). In entrambi i casi il tensore metrico è una matrice simmetrica 2×2 definita positiva che dipende dalle coordinate (θ, ρ) oppure (φ, ψ).

Esercizio 3.7. Siano $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera e $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ il modello dell'iperboloide dello spazio iperbolico. Mostra che per ogni coppia di punti p, q in S^n oppure I^n valgono le disuguaglianze

$$\cos d(p, q) \leq \langle p, q \rangle \quad \text{se } p, q \in S^n,$$
$$\cosh d(p, q) \leq -\langle p, q \rangle \quad \text{se } p, q \in I^n.$$

In realtà vedremo che entrambe sono uguaglianze. Consiglio di fare prima S^2, poi S^n, e infine di adattare il ragionamento a I^n.

4. Esercizi del 19 dicembre

Esercizio 4.1. Considera un parallelo γ in S^2 (visualizzato in coordinate sferiche) con latitudine fissata $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Sia v un vettore tangente ad un punto p di γ che punta verso il polo nord. Sia $v' \in T_pS^2$ ottenuto da v tramite trasporto parallelo lungo tutta la curva γ. Calcola l'angolo fra v e v' in funzione di φ.

Esercizio 4.2. Considera $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con le coordinate polari (ρ, θ). Determina il tensore metrico e i simboli di Christoffel in queste coordinate. Verifica che il tensore di Riemann è ovunque nullo (questo fatto deve valere rispetto a qualsiasi sistema di coordinate!).

Esercizio 4.3. Mostra che i simboli di Christoffel del piano iperbolico con il modello del semipiano H^2 sono i seguenti: Mostra che

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$

Esercizio 4.4. Sia $v_0 = (0, 1)$ punto tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Calcola l'angolo fra v_t e l'asse delle ordinate (il risultato dipende da t). Deduci che γ non è una geodetica. Puoi usare i simboli di Christoffel di H^2 descritti nell'esercizio precedente senza calcolarli.

Esercizio 4.5. Considera la connessione ∇ su $\mathbb{R}^3$ con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$
$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g, ma non è simmetrica. Determina le geodetiche di questa connessione.

Esercizio 4.6. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico $(B^n, \mathbf{g})$,

$$\mathbf{g}(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 \mathbf{g}^E(x)$$

dove $\mathbf{g}^E$ è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh t \cdot v = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} v.$$

Esercizio 4.7. Leggi sul libro il fatto che la differenza $D = \nabla - \nabla'$ fra due connessioni ∇, ∇' su M è interpretabile come un campo tensoriale di tipo $(1, 2)$. Mostra che ∇ e ∇' hanno le stesse geodetiche $\iff$ D è un tensore antisimmetrico.[1] Deduci che:

(1) $\nabla = \nabla' \iff$ hanno le stesse geodetiche e la stessa torsione.
(2) Per ogni ∇ esiste un'unica connessione ∇' con le stesse geodetiche di ∇ e con torsione nulla.

Hint. Dimostra che D è antisimmetrico $\iff D(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ per ogni campo $\mathbf{X}$ $\iff \nabla'_X \mathbf{X} = \nabla_X \mathbf{X}$ per ogni campo $\mathbf{X}$ $\iff$ hanno le stesse geodetiche. $\square$

[1] Cioè per ogni $p \in M$ la mappa $D(p) \colon T_pM \times T_pM \to T_pM$ è antisimmetrica, cioè $D(p)(v, w) = -D(p)(w, v)$. In coordinate: $D_{ij}^k = -D_{ji}^k$.