

# ESERCIZI DI TOPOLOGIA

BRUNO MARTELLI

Alcuni esercizi sono contrassegnati dai simboli  $(\star)$ ,  $(\star\star)$ ,  $(\star\star\star)$ , a indicare che sono esercizi più difficili (il numero di asterischi è proporzionale alla difficoltà). Altri esercizi sono accompagnati da una traccia di svolgimento. Anche alcune osservazioni sono contrassegnate con  $(\star)$ , ad indicare che mostrano aspetti più difficili della teoria che possono essere saltati ad una prima lettura.

## 1. CONNESSI E CONNESSI PER ARCHI

**1.1. Componenti connesse.** Dato uno spazio topologico  $X$  e un punto  $p \in X$ , definiamo la *componente connessa*  $c(p)$  di  $X$  contenente  $p$  come il più grande sottoinsieme connesso di  $X$  fra quelli che contengono  $p$ . A priori, questa definizione potrebbe essere ambigua: chi ci dice che esista un connesso più grande di tutti fra quelli contenenti  $p$ ?

Ad esempio, non possiamo definire  $c'(p)$  come il sottoinsieme *compatto* più grande fra quelli contenenti  $p$ : se  $X = \mathbb{R}$  un tale insieme  $c'(p)$  non esiste (ogni compatto è contenuto in un compatto più grande ottenuto aggiungendo un punto). La buona definizione della componente connessa segue dalla seguente:

**Proposizione 1.1.** *L'unione di tutti i sottoinsiemi di  $X$  connessi contenenti  $p$  è un insieme connesso.*

*Dim.* In generale, se ho dei connessi  $\{A_i\}_{i \in I}$ , dove  $I$  è un insieme di indici, tali che  $p \in A_i$  per ogni  $i$ , allora  $A = \cup_{i \in I} A_i$  è connesso. Supponiamo infatti che  $A = A' \sqcup A''$  sia unione disgiunta di due aperti; possiamo supporre che  $p \in A'$  e  $p \notin A''$ . Allora anche  $A_i \cap A'$  e  $A_i \cap A''$  sono due aperti disgiunti in  $A_i$  (ovviamente, considerato con la topologia indotta!), la cui unione è  $A_i$ , per ogni  $i \in I$ . Ma poiché  $A_i$  è connesso e contiene  $p$ , abbiamo necessariamente  $A'' \cap A_i = \emptyset$  per ogni  $i$ , da cui segue che  $A'' = \emptyset$ . Quindi  $A$  è connesso.  $\square$

**Corollario 1.2.** *L'unione di tutti i connessi contenenti  $p$  è il più grande connesso contenente  $p$ , che chiamo  $c(p)$ .*

*Dim.* Sia  $A$  l'unione di tutti i connessi contenenti  $p$ . Per la proposizione sopra,  $A$  è connesso. Ogni altro connesso contenente  $p$  è un sottoinsieme di  $A$  per definizione di  $A$ .  $\square$

**Osservazione 1.3.** Per ogni  $q \in c(p)$  abbiamo  $c(q) = c(p)$ .

*Dim.* Se  $q \in c(p)$ , allora  $c(p)$  è un connesso contenente  $q$ , quindi  $c(p) \subset c(q)$ . Ma non ci sono connessi contenenti  $c(p)$  più grossi di  $c(p)$ , quindi  $c(p) = c(q)$ .  $\square$

Definiamo quindi la relazione di equivalenza  $\sim$  su  $X$  ponendo  $p \sim q$  se e solo se  $q \in c(p)$ , cioè se  $c(p) = c(q)$ . La relazione  $\sim$  induce quindi una partizione di  $X$  in insiemi (dati dalle classi di equivalenza), che chiamiamo le *componenti connesse di  $X$* , e che denotiamo con  $C(X)$ .

**Proposizione 1.4.** *Ogni componente connessa di  $X$  è chiusa.*

*Dim.* Sia  $c(p)$  una componente connessa e  $q \in X$  un punto non contenuto in  $c(p)$ . Dimostriamo che esiste un aperto  $U(q)$  contenente  $q$  e disgiunto da  $p$ : questo implica che  $X \setminus c(p)$  è aperto, cioè che  $c(p)$  è chiuso.

Il sottospazio  $c(p) \cup \{q\}$  non è connesso, perché nessun connesso contiene strettamente  $c(p)$ . Quindi  $c(p) \cup \{q\}$  è l'unione di due aperti disgiunti, che devono essere  $c(p)$  e  $\{q\}$ . Che  $\{q\}$  sia aperto dentro  $c(p) \cup \{q\}$  vuol dire che c'è un aperto  $U(q)$  di  $X$  contenente  $q$  e disgiunto da  $c(p)$ .  $\square$

**Proposizione 1.5.** *Il passaggio da  $X$  a  $C(X)$  definisce un funtore covariante dalla categoria degli spazi topologici a quella degli insiemi.*

*Dim.* Dobbiamo dimostrare che ogni  $f : X \rightarrow Y$  continua induce una  $f_* : C(X) \rightarrow C(Y)$  tale che:

- (1) se  $f$  è l'identità su  $X$ , allora  $f_*$  è l'identità su  $C(X)$ ,
- (2) se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  sono continue allora  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

La  $f_*$  è definita nel modo seguente: poiché  $f$  è continua, manda connessi in connessi. Quindi se  $A \in C(X)$  è una componente connessa di  $X$  allora  $f(A)$  è connessa, ed è quindi contenuta in una componente connessa di  $Y$ , che denoto con  $f_*(A)$ . Ottengo quindi una funzione  $f_* : C(X) \rightarrow C(Y)$ . È ora facile dimostrare i due punti richiesti.  $\square$

**Proposizione 1.6.** *Se  $f$  è suriettiva anche  $f_*$  lo è.*

*Dim.* Sia data  $f : X \rightarrow Y$  e una componente connessa  $A$  di  $Y$ . Preso un punto qualsiasi  $q \in A$ , poiché  $f$  è suriettiva esiste una controimmagine  $p \in f^{-1}(q)$ . Quindi  $f(c(p))$  è un connesso che contiene  $q$ , ed è quindi contenuto in  $A$ : allora  $f_*(c(p)) = A$  e  $f_*$  è suriettiva.  $\square$

**Corollario 1.7.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua fra spazi topologici. Se  $f$  è suriettiva, allora  $Y$  non può avere più componenti connesse di  $X$ .*

*Dim.* Se  $f$  è suriettiva anche  $f_* : C(X) \rightarrow C(Y)$  lo è e quindi  $C(Y)$  non può avere cardinalità superiore a  $C(X)$ .  $\square$

**Esercizio 1.8.** Mostrare con esempi semplici che  $f$  iniettiva non implica in generale che  $f_*$  sia iniettiva.

**1.2. Componenti connesse per archi.** Ricordiamo che uno spazio topologico  $X$  è *connesso per archi* se per ogni  $p, q \in X$  esiste una funzione continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $f(0) = p$  e  $f(1) = q$ . Una tale funzione è detta un *arco* o un *cammino* che collega  $p$  e  $q$ . Dimostriamo ora che si possono definire in modo analogo le *componenti connesse per archi*  $C^{\text{arc}}(X)$  di  $X$ :

**Proposizione 1.9.** *L'unione  $c^{\text{arc}}(p)$  di tutti i sottoinsiemi di  $X$  connessi per archi contenenti  $p$  è un insieme connesso per archi. L'insieme  $c^{\text{arc}}(p)$  è inoltre l'insieme dei punti  $q$  per cui esiste un arco in  $X$  che collega  $p$  e  $q$ .*

*Dim.* In generale, se ho dei connessi per archi  $\{A_i\}_{i \in I}$ , dove  $I$  è un insieme di indici, tali che  $p \in A_i$  per ogni  $i$ , allora  $A = \cup_{i \in I} A_i$  è connesso per archi. Infatti presi  $q, q' \in A$ , abbiamo  $q \in A_i$  e  $q' \in A_{i'}$  per qualche  $i, i' \in I$ . Poiché  $A_i$  ed  $A_{i'}$  sono connessi per archi che contengono  $p$ , esistono dei cammini  $f : [0, 1] \rightarrow A_i$  e  $f' : [0, 1] \rightarrow A_{i'}$  tali che  $f(0) = f'(0) = p$  e  $f(1) = q, f'(1) = q'$ . A questo punto il cammino  $F : [0, 1] \rightarrow A$  definito come

$$F(t) = \begin{cases} f(1-2t) & \text{se } t \leq 1/2 \\ f'(2t-1) & \text{se } t \geq 1/2 \end{cases}$$

collega  $q$  a  $q'$ , e quindi  $A$  è connesso per archi. La seconda asserzione segue facilmente.  $\square$

La seconda asserzione della Proposizione 1.9 mostra che possiamo definire le componenti connesse per archi direttamente con una relazione di equivalenza  $\sim^{\text{arc}}$ : poniamo  $p \sim^{\text{arc}} q$  se e solo se esiste un cammino che collega  $p$  e  $q$ . Gli insiemi della partizione indotta sono le *componenti connesse per archi*.

**Osservazione 1.10.** Una  $f : X \rightarrow Y$  continua manda connessi per archi in connessi per archi. Come sopra si vede quindi che associando  $C^{\text{arc}}(X)$  ad  $X$  si ottiene un funtore covariante. Anche qui, se  $f$  è suriettiva anche  $f_* : C^{\text{arc}}(X) \rightarrow C^{\text{arc}}(Y)$  lo è.

**1.3. Differenze fra le due definizioni di connessione.**

**Proposizione 1.11.** *Ogni spazio topologico connesso per archi è connesso. Il sottospazio  $X \subset \mathbb{R}^2$  definito da*

$$X = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\} \cup \{(x, \sin 1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$$

è connesso ma non connesso per archi.

*Dim.* Dimostriamo che uno spazio  $Y$  connesso per archi è connesso. Fissiamo un punto  $p \in Y$ . Se  $Y$  è connesso per archi, ogni altro punto  $q$  è collegabile a  $p$  mediante un cammino  $\gamma_q : [0, 1] \rightarrow Y$ . L'immagine di  $\gamma_q$  è connessa (perché  $[0, 1]$  lo è) e contiene  $p$ . L'unione di tutte queste immagini al variare di  $q$  in  $Y$  è tutto  $Y$ , che è quindi unione di connessi contenenti  $p$ : quindi  $Y = c(p)$  è connesso.

Consideriamo ora il sottospazio  $X$  di  $\mathbb{R}^2$  dato. Il sottospazio  $X \cap \{x > 0\}$  è connesso per archi perché è l'immagine della funzione continua  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (\sin(1/x), 1/x)$  definita sul connesso per archi  $(0, 1]$ . Anche  $X \cap \{x = 0\}$  è connesso per archi. Quindi  $X$  ha una o due componenti connesse per archi. Il sottospazio  $X \cap \{x > 0\}$  non è chiuso in  $X$ : ad esempio il punto  $(0, 0)$  è limite della successione  $(1/k\pi, 1/k) \in X \cap \{x > 0\}$  ma non è in  $X \cap \{x > 0\}$ . Quindi  $X \cap \{x > 0\}$  non può essere una componente connessa per la Proposizione 1.4. Quindi  $X$  ha una sola componente connessa, cioè è connesso.

D'altra parte, non è troppo difficile verificare che non esiste una funzione continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  con  $f(0) = (0, 0)$  e  $f(1) = (1/\pi, 0)$ . Quindi  $X$  non è connesso per archi.  $\square$

**Osservazione 1.12.** Segue dalla Proposizione 1.11 che ogni componente connessa di uno spazio  $X$  è unione di componenti connesse per archi di  $X$ . Otteniamo quindi una mappa suriettiva  $C^{\text{arc}}(X) \rightarrow C(X)$  per ogni  $X$ .

Le componenti connesse per archi, a differenza delle componenti connesse, non sono necessariamente chiuse.

## 2. RETRAZIONI

Una retrazione  $r : X \rightarrow A$  è un'*inversa sinistra* della inclusione  $i : A \rightarrow X$ , cioè  $r \circ i : A \rightarrow A$  è la funzione identità. L'esistenza di una inversa destra è invece poco interessante:

**Esercizio 2.1.** L'inclusione  $i : A \rightarrow X$  ha una inversa destra se e solo se è un omeomorfismo.

**Proposizione 2.2.** Sia  $X$  uno spazio topologico che si retrae su un insieme  $A \subset X$ . Allora  $C(A)$  non ha cardinalità superiore a  $C(X)$ . In particolare, se  $X$  è connesso allora  $A$  è connesso.

*Dim.* La retrazione è continua e suriettiva, quindi segue dalla Proposizione 1.7.  $\square$

**Esempio 2.3.** Esempi di retrazioni:

- $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ ,  $f(x) = x/|x|$ ;
- $f : X \rightarrow p_0$  dove  $p_0 \in X$  è un punto qualsiasi in uno spazio topologico  $X$  qualsiasi, data dalla funzione costante  $f(p) = p_0$  per ogni  $p \in X$ ;
- $f : \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \neq 0\} \rightarrow \{(z, 0) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1\}$ , con immagine omeomorfa a  $S^1$ , data da  $f(z, w) = (z/|z|, 0)$ ;
- $f : \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \neq 0, w \neq 0\} \rightarrow \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w| = 1\}$ , con immagine omeomorfa al toro  $S^1 \times S^1$ , data da  $f(z, w) = (z/|z|, w/|w|)$ .

### 3. PUNTI FISSI

Vedremo (almeno per  $n = 2$ ) che ogni mappa continua  $f : D^n \rightarrow D^n$  ha almeno un punto fisso. Quali altri spazi, oltre al disco  $D^n$ , soddisfano questa proprietà? L'esempio seguente mostra che sono pochi:

**Esempio 3.1.** I seguenti spazi  $X$  ammettono mappe senza punti fissi:

- $X$  spazio sconnesso qualsiasi: prendiamo una qualsiasi mappa che manda costantemente ogni componente connessa in un punto fissato contenuto in un'altra componente connessa,
- $X = S^n$ : prendiamo la mappa antipodale  $f : S^n \rightarrow S^n$ ,  $f(x) = -x$ ,
- $X = \mathbb{R}^n$ : prendiamo una traslazione qualsiasi,
- $X = B^n = D^n \setminus \partial D^n$  (la palla), perché è omeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  tramite l'omeomorfismo  $\phi : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dato da  $\phi(x) = x \cdot \tan(|x\pi/2|)$ . Quindi il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 B^n & \xrightarrow{t} & B^n \\
 \phi^{-1} \uparrow & & \phi \downarrow \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{t'} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

dove  $t$  è una traslazione qualsiasi, fornisce una mappa  $t' = \phi \circ t \circ \phi^{-1}$  senza punti fissi.

**Osservazione 3.2.** A proposito della mappa da  $B^n$  in sé senza punti fissi, si noti come possiamo superare, tramite un omeomorfismo furbo, le difficoltà che abbiamo in generale nello scrivere funzioni continue tra spazi topologici: la maggior parte delle funzioni continue (anche da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , ad esempio) infatti non ha una scrittura, cioè un "nome" che la identifichi.

**Esercizio 3.3.** Dimostrare (usando il caso noto per  $X = D^n$ ) che ogni mappa continua da  $X$  in sé ha un punto fisso, per i seguenti spazi  $X$ :

- ( $\star$ )  $X = [-1, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1, 1] \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,
- ( $\star\star$ )  $X$  è lo spazio descritto nella Proposizione 1.11.

*Traccia.* Nel primo caso, costruire una retrazione di  $D^2$  su  $X$ . Nel secondo caso, notare che  $C^{\text{arc}}(X)$  consta di due componenti. Data  $f : X \rightarrow X$ , esaminare come può comportarsi  $f_* : C^{\text{arc}}(X) \rightarrow C^{\text{arc}}(X)$  e vedere caso per caso.  $\square$

#### 4. OMOTOPIA

**4.1. Mappe omotope.** Dati due sottoinsiemi  $A \subset X$  e  $B \subset Y$ , una mappa  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  è per definizione una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $f(A) \subset B$ . Due mappe continue  $f, f' : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sono *omotope* se esiste una famiglia continua di mappe  $f_t : (X, A) \rightarrow (Y, B), t \in [0, 1]$  che collega  $f = f_0$  a  $f' = f_1$ . Sia  $C(X, Y)$  lo spazio delle funzioni continue da  $X$  in  $Y$ . Scriviamo  $f \sim f'$  quando  $f, f' \in C(X, Y)$  sono omotope.

**Proposizione 4.1.** *La  $\sim$  è una relazione di equivalenza.*

*Dim.* Dobbiamo dimostrare che  $\sim$  è:

**riflessiva:** Abbiamo  $f \sim f$ : basta prendere  $f_t = f$  per ogni  $t$ .

**simmetrica:** Se  $f \sim f'$ , c'è una famiglia  $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$  continua che collega  $f = f_0$  e  $f' = f_1$ . Prendendo  $f'_t = f_{1-t}$  otteniamo una famiglia che collega  $f' = f'_0$  e  $f = f'_1$ , quindi  $f' \sim f$ .

**transitiva:** Se  $f \sim f'$  e  $f' \sim f''$ , abbiamo due famiglie continue  $f_t$  e  $f'_t$  che collegano rispettivamente  $f$  a  $f'$  e  $f'$  a  $f''$ . Definisco quindi  $f''_t$  nel modo seguente:

$$f''_t = \begin{cases} f_{2t} & \text{per ogni } t \leq 1/2, \\ f'_{2t-1} & \text{per ogni } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Le due definizioni coincidono per  $t = 1/2$ . Guardiamo alla famiglia  $f''_t$  come una mappa da  $X \times [0, 1]$  in  $T$ . Le restrizioni di  $f''_t$  a  $X \times [0, 1/2]$  e  $X \times [1/2, 1]$  sono continue, coincidono sul chiuso  $X \times \{1/2\}$ , e quindi  $f''_t$  è continua su tutto  $X \times [0, 1]$ . Quindi è una omotopia che collega  $f''_0 = f$  a  $f''_1 = f''$ , e abbiamo verificato la proprietà transitiva:  $f \sim f''$ .  $\square$

Definiamo quindi  $[(X, A), (Y, B)]$  come il quoziente  $C((X, A), (Y, B))/\sim$ .

**Proposizione 4.2.** *Se  $f \sim f' : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g \sim g' : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ , allora  $g \circ f \sim g' \circ f' : (X, A) \rightarrow (Z, C)$ .*

*Dim.* Le funzioni  $f$  e  $f'$  sono collegate da una omotopia  $f_t$ , e le funzioni  $g$  e  $g'$  sono collegate da una omotopia  $g_t$ . Quindi  $g \circ f$  e  $g' \circ f'$  sono collegate da una omotopia  $g_t \circ f_t$ . Per dimostrare questa ultima asserzione, devo però verificare che  $g_t \circ f_t$  sia effettivamente continua su  $X \times [0, 1]$ .

Per fare questo siamo costretti ad usare la notazione più pesante: scrivo  $f_t$  e  $g_t$  rispettivamente come  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  e  $G : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ . La mappa  $g_t \circ f_t$  si scrive quindi come:

$$\begin{aligned} H : X \times [0, 1] &\rightarrow Z, \\ (x, t) &\mapsto G(F(x, t), t). \end{aligned}$$

Ricordiamo che una funzione a valori in un prodotto è continua se e solo se sono continue le varie componenti: quindi la funzione  $X \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$  data da  $(F(x, t), t)$  è continua, perché lo sono  $F$  e  $t$ . Componendo questa funzione con  $G$  ottengo  $H$ , che è quindi continua perché composizione di funzioni continue.  $\square$

Quindi la composizione fra funzioni passa al quoziente: date due classi  $\alpha \in [(X, A), (Y, B)]$  e  $\beta \in [(Y, B), (Z, C)]$  possiamo definire  $\beta \circ \alpha \in [(X, A), (Z, C)]$ .

**Osservazione 4.3** ( $\star$ ). Fissata una coppia  $(X, A)$ , otteniamo due funtori  $[(X, A), *]$  e  $[*, (X, A)]$  dalla categoria delle coppie in quella degli insiemi: il primo funtore associa alla coppia  $(Y, B)$  l'insieme  $[(X, A), (Y, B)]$ , mentre il secondo gli associa l'insieme  $[(Y, B), (X, A)]$ . Il primo funtore è *covariante*, cioè una mappa continua

$$(Y, B) \xrightarrow{f} (Z, C)$$

induce una funzione:

$$[(X, A), (Y, B)] \xrightarrow{f_*} [(X, A), (Z, C)],$$

mentre il secondo è *controvariante*, cioè “inverte le frecce”: la stessa  $f$  induce una funzione

$$[(Y, B), (X, A)] \xleftarrow{f^*} [(Z, C), (X, A)].$$

Normalmente si indicano con  $f_*$  e  $f^*$  le mappe associate, rispettivamente nel caso covariante e controvariante.

L'affermazione seguente ci dice che i funtori  $C$  e  $C^{\text{arc}}$  non “vedono” l'omotopia, cioè non distinguono mappe omotope.

**Proposizione 4.4.** *Se  $f, f' : X \rightarrow Y$  sono omotope allora inducono la stessa funzione  $f_* = f'_* : C^{\text{arc}}(X) \rightarrow C^{\text{arc}}(Y)$  (e quindi anche la stessa  $f_* = f'_* : C(X) \rightarrow C(Y)$ ).*

*Dim.* Sia  $f_t$  l'omotopia che collega  $f$  e  $f'$ . Quindi  $f_0 = f$  e  $f_1 = f'$ . Per ogni  $x_0 \in X$ , le immagini  $f_0(x_0)$  e  $f_1(x_0)$  sono collegate da un arco  $(f_t(x_0))_{t \in [0, 1]}$ , e quindi appartengono alla stessa componente connessa per archi di  $Y$ . Quindi  $f_* = f'_*$ .  $\square$

## 4.2. Spazi omotopi.

**Definizione 4.5.** Due spazi  $X$  e  $Y$  sono *omotopi* se esistono due funzioni  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tali che  $g \circ f \sim id_X$  e  $f \circ g \sim id_Y$ .

**Esercizio 4.6.** L'omotopia è una relazione di equivalenza nella classe degli spazi topologici.

*Traccia.* Le proprietà riflessiva e simmetrica sono facili. Per dimostrare la proprietà transitiva usare la Proposizione 4.2.  $\square$

Abbiamo già visto che i funtori  $C$  e  $C^{\text{arc}}$  non distinguono mappe omotope. Ne segue che non distinguono spazi omotopi:

**Proposizione 4.7.** *Se  $X$  e  $Y$  sono omotopi allora  $C(X)$  e  $C(Y)$  sono isomorfi (cioè sono insiemi con la stessa cardinalità). Anche  $C^{\text{arc}}(X)$  e  $C^{\text{arc}}(Y)$  sono isomorfi.*

*Dim.* Per ipotesi esistono  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tali che  $g \circ f \sim id_X$  e  $f \circ g \sim id_Y$ . La Proposizione 4.4 ci dice che  $(g \circ f)_* = (id_X)_* : C(X) \rightarrow C(X)$ . Inoltre  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$  e  $(id_X)_*$  è l'identità, perché  $C$  è un funtore (Proposizione 1.5). Quindi  $g_* \circ f_* = id_X$ . Analogamente si dimostra che  $f_* \circ g_* = id_Y$ . Quindi  $C(X)$  e  $C(Y)$  sono isomorfi.  $\square$

## 5. GRUPPO FONDAMENTALE

**5.1. Definizione.** Il *gruppo fondamentale*  $\pi_1(X, x)$  di uno spazio topologico  $X$  con *punto base*  $x \in X$  è l'insieme dei lacci  $\Omega_1(X, x)$ , quozientato tramite omotopia. Sull'insieme  $\Omega_1(X, x)$  è definito un prodotto, tramite concatenamento di lacci. L'asserzione seguente mostra che il prodotto è definito anche al quoziente  $\pi_1(X, x)$ .

**Proposizione 5.1.** *Se  $\alpha_0 \sim \alpha_1$  e  $\beta_0 \sim \beta_1$  sono lacci in  $\Omega_1(X, x)$ , allora  $\beta_0 * \alpha_0 \sim \beta_1 * \alpha_1$ .*

*Dim.* Se  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  sono le omotopie che collegano  $\alpha_0$  a  $\alpha_1$  e  $\beta_0$  a  $\beta_1$ , allora l'omotopia  $\alpha_t * \beta_t$  collega  $\beta_0 * \alpha_0$  e  $\beta_1 * \alpha_1$ . Come nella dimostrazione della Proposizione 4.2, per accertarmi che questa sia continua devo però usare la notazione più pesante.

Siano  $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  e  $B : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tali che  $A(s, t) = \alpha_t(s)$  e  $B(s, t) = \beta_t(s)$ . L'omotopia  $\beta_t * \alpha_t$  è data da:

$$C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} A(2s, t) & \text{per } s \leq 1/2, \\ B(2s - 1, t) & \text{per } s \geq 1/2. \end{cases}$$

ed è in effetti continua, perché l'attaccamento di due funzioni continue coincidenti sul chiuso  $\{1/2\} \times [0, 1]$ .  $\square$

Tale prodotto non dà una struttura di gruppo su  $\Omega_1(X, x)$ , infatti nessuna delle richieste per essere un gruppo (associatività, esistenza dell'elemento neutro e dell'inversa) è soddisfatta! Le cose migliorano sensibilmente sul quoziente:

**Proposizione 5.2.**  $(\pi_1(X, x), *)$  è un gruppo.

*Dim.* Si devono dimostrare le cose seguenti:

**associatività:** Dati tre lacci  $\alpha, \beta, \gamma$ , dobbiamo mostrare che  $(\alpha * \beta) * \gamma$  e  $\alpha * (\beta * \gamma)$  sono omotopi. Abbiamo:

$$(\alpha * \beta) * \gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

$$s \mapsto \begin{cases} \alpha(4s) & \text{per } s \leq 1/4, \\ \beta(4s - 1) & \text{per } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma(2s - 1) & \text{per } s \geq 1/2. \end{cases}$$

$$\alpha * (\beta * \gamma) : [0, 1] \rightarrow X$$

$$s \mapsto \begin{cases} \alpha(2s) & \text{per } s \leq 1/2, \\ \beta(4s - 2) & \text{per } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ \gamma(4s - 3) & \text{per } s \geq 3/4. \end{cases}$$

Una omotopia è data da:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{2-t}\right) & \text{per } t \leq 2 - 4s, \\ \beta(4s - 2 + t) & \text{per } 2 - 4s \leq t \leq 3 - 4s, \\ \gamma\left(\frac{4s-4}{t+1} + 1\right) & \text{per } t \geq 3 - 4s. \end{cases}$$

Si veda Fig. 1: sia  $S$  l'unione del bordo del quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  e dei due segmenti storti contenuti in  $Q$ . Abbiamo  $F(S) = x$ , punto base di  $X$ . La mappa  $F$  è continua perché è l'incollamento di funzioni continue, che coincidono sui due segmenti storti (che sono chiusi).

**elemento neutro:** L'elemento neutro è dato dal laccio banale  $\sigma(s) \equiv x$ . Dobbiamo far vedere che  $\alpha * \sigma$ ,  $\sigma * \alpha$  e  $\alpha$  sono lacci omotopi. Un'omotopia tra  $\alpha * \sigma$  e  $\alpha$  è data da:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{2-t}\right) & \text{per } t \leq 2 - 2s, \\ x & \text{per } t \geq 2 - 2s. \end{cases}$$

Si vede analogamente che  $\sigma * \alpha$  è omotopo a  $\alpha$ .

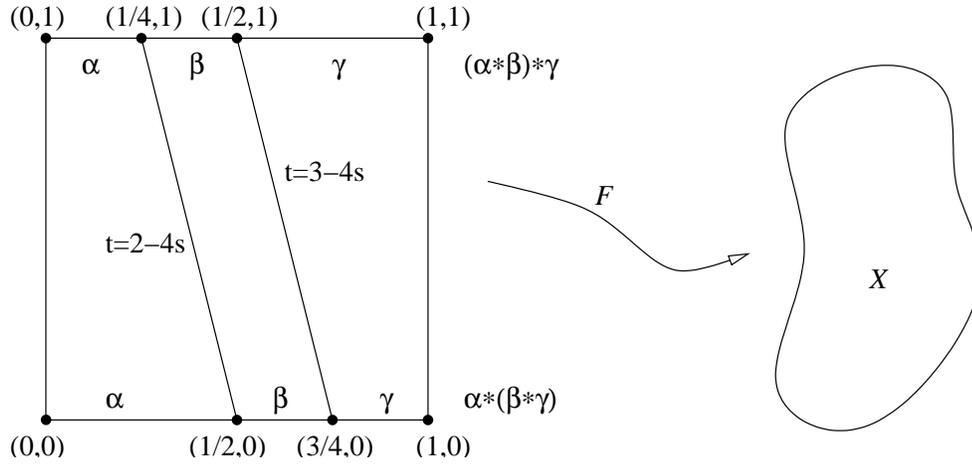


Figure 1: Schema per la dimostrazione della proprietà associativa.

**esistenza dell'inversa:** Dato un laccio  $\alpha$ , scriviamo  $\alpha^{-1}$  il laccio  $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$ . Mostriamo che  $\alpha^{-1}$  è l'inversa di  $\alpha$ , cioè che  $\alpha * \alpha^{-1}$ ,  $\alpha^{-1} * \alpha$  e il laccio costante  $\sigma$  sono omotopi. Una omotopia tra  $\alpha * \alpha^{-1}$  e  $\sigma$  è data da:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

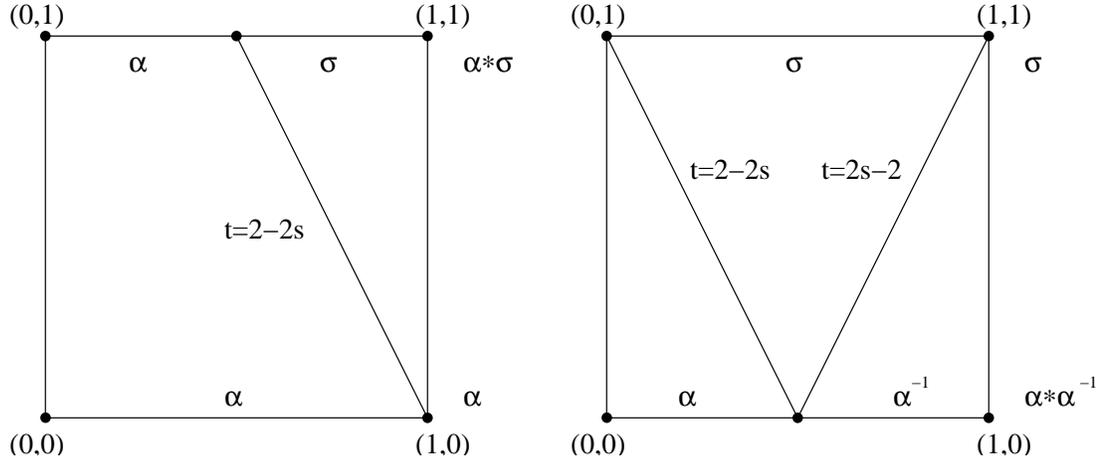
$$(s, t) \mapsto \begin{cases} \alpha(2s) & \text{per } s \leq \frac{1-t}{2}, \\ \alpha(1-t) & \text{per } \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2}, \\ \alpha(2-2s) & \text{per } s \geq \frac{1+t}{2}. \end{cases}$$

Si veda Fig. 2. Una omotopia tra  $\alpha^{-1} * \alpha$  e  $\sigma$  si costruisce in modo analogo.

Notiamo la differenza fra le prime due omotopie, in cui le varie  $\alpha, \beta, \gamma$  vengono riscalate al variare di  $t$  (cioè viene cambiata la velocità di percorrenza del laccio), e l'ultima, in cui le velocità di  $\alpha$  e  $\alpha^{-1}$  rimangono alterate, ma i lacci vengono troncati.  $\square$

Una mappa continua  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  definisce in modo naturale una mappa  $f_* : \Omega_1(X, x) \rightarrow \Omega_1(Y, y)$ , che associa ad un laccio  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  il laccio  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow Y$  (verifichiamo che ha estremi in  $y$  perché  $f(x) = y$ ).

**Proposizione 5.3.** *La mappa  $f_*$  è ben definita al quoziente  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  ed è un omomorfismo.*



**Figure 2:** Schemi per la dimostrazione dell'esistenza dell'elemento neutro e dell'inversa.

*Dim.* Se  $\alpha \sim \alpha'$  sono lacci omotopi, allora  $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$  per la Proposizione 4.2. Quindi  $f_*$  è ben definita. La  $f$  manda il laccio costante in  $x$  nel laccio costante in  $y$ , e inoltre  $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$  per ogni  $\alpha, \beta \in \Omega_1(X, x)$ : segue banalmente che  $f_*$  è un omomorfismo.  $\square$

**Osservazione 5.4.** Quindi  $\pi_1$  è un funtore dalla categoria degli spazi puntati (con mappe continue) alla categoria dei gruppi (con omomorfismi): le due proprietà elencate nella Proposizione 1.5 sono dimostrate facilmente. Notiamo subito che  $\pi_1$  è un funtore più raffinato di  $C$  o  $C^{\text{arc}}$ , perché associa ad  $X$  (e a mappe continue) un gruppo (e omomorfismi) invece che un insieme (e mappe fra insiemi).

**5.2. Retrazioni.** Abbiamo visto che se  $A \subset X$  è retratto di  $X$ , allora  $C(A)$  non è più grande di  $C(X)$ . Vale un risultato simile per  $\pi_1$ :

**Proposizione 5.5.** *Se  $A \subset X$  è retratto di  $X$ , allora l'inclusione  $i : A \hookrightarrow X$  induce una mappa iniettiva  $i_* : \pi_1(A, a) \hookrightarrow \pi_1(X, a)$ , per ogni  $a \in A$ .*

*Dim.* Esiste una retrazione  $r : X \rightarrow A$ , cioè una inversa sinistra dell'inclusione  $i : A \rightarrow X$ . Quindi  $r \circ i : A \rightarrow A$  è l'identità. Quindi

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$$

è l'identità. Quindi  $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  è iniettiva.  $\square$

**Osservazione 5.6.** A differenza dei funtori  $C$  e  $C^{\text{arc}}$ ,  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  suriettiva non implica  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  suriettiva in generale! I rivestimenti, che vedremo più avanti, forniscono numerosi controesempi. Non è neppure vero che  $f$  iniettiva implica  $f_*$  iniettiva.

**5.3. Dipendenza del punto base.** Per fortuna possiamo trascurare il punto base se  $X$  è connesso per archi, in virtù del seguente risultato:

**Proposizione 5.7.** *Se  $X$  è connesso per archi,  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(X, x')$  sono isomorfi (in modo non canonico!) per ogni  $x$  e  $x'$ .*

*Dim.* Sia  $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$  un arco con estremi in  $x$  e  $x'$ . Definiamo una mappa  $\psi : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x')$  nel modo seguente: se  $\alpha \in \pi_1(X, x)$ , allora  $\psi(\alpha)$  è il laccio ottenuto concatenando  $\lambda$ ,  $\alpha$  e  $\lambda^{-1}$ . Con le stesse tecniche della dimostrazione della Proposizione 5.2 si vede che  $\psi$  è ben definita, è un omomorfismo, ed è iniettivo e suriettivo (si consiglia di fare le verifiche per esercizio!). L'isomorfismo non è canonico perché dipende dalla scelta dell'arco  $\lambda$ .  $\square$

L'isomorfismo non è canonico perché ci sono scelte arbitrarie da fare per costruirlo: la situazione è simile a quella per cui ogni spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  è isomorfo a  $\mathbb{K}^n$  in modo non canonico, perché si deve scegliere una base.

D'ora in poi, quando scriviamo  $\pi_1(X)$  indichiamo un qualsiasi gruppo  $\pi_1(X, x)$ . Dobbiamo però ricordarci che senza fissare un punto base  $x$  non è possibile associare ad un elemento di  $\pi_1(X)$  un laccio in  $X$  (analogamente, senza una base per  $V$  non è possibile associare ad un elemento di  $\mathbb{R}^n$  un vettore in  $V$ ).

**5.4. Omotopia.** Abbiamo visto nella Sezione 4 che il funtore  $C$  non distingue mappe omotope. Non lo fa neanche il funtore  $\pi_1$ :

**Proposizione 5.8.** *Se  $f, f' : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  sono omotope, allora inducono lo stesso omomorfismo  $f_* = f'_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ .*

*Dim.* Se  $\alpha$  è un laccio in  $X$ ,  $f \circ \alpha$  e  $f' \circ \alpha$  sono lacci omotopi in  $Y$ , e quindi rappresentano lo stesso elemento in  $\pi_1(Y, y)$ .  $\square$

Come per  $C$  e  $C^{\text{arc}}$ , se ne deduce che  $\pi_1$  non distingue spazi omotopi.

**Corollario 5.9.** *Se  $X$  e  $Y$  sono omotopi, allora  $\pi_1(X)$  e  $\pi_1(Y)$  sono isomorfi.*

*Dim.* Stessa dimostrazione della Proposizione 4.7.  $\square$

**5.5. Retratto forte di deformazione.** Un sottoinsieme  $A \subset X$  è un *retratto forte di deformazione* di  $X$  se esiste una famiglia continua  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  di mappe da  $X$  in sé, che collega l'identità  $f_0 : X \rightarrow X$  ad una retrazione  $f_1$  di  $X$  su  $A$ , tale che  $f_t|_A : A \rightarrow A$  sia l'identità per ogni  $t$ .

**Proposizione 5.10.** *Se  $A \subset X$  è un retratto forte di deformazione di  $X$  allora l'inclusione  $i : A \rightarrow X$  induce un isomorfismo  $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ , per ogni punto base  $a \in A$ .*

*Dim.* Sappiamo già che  $i_*$  è iniettiva, per la Proposizione 5.5. Sappiamo inoltre che c'è una retrazione  $r : X \rightarrow A$  tale che  $i \circ r : X \rightarrow X$  è omotopa all'identità  $id_X$ : quindi  $(i \circ r)_* = i_* \circ r_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  è l'identità, e quindi  $i_*$  è anche suriettiva.  $\square$

Usando questo risultato possiamo calcolare il gruppo fondamentale di molti spazi topologici.

**Esercizio 5.11.** Si calcoli  $\pi_1(X)$  per i seguenti spazi topologici  $X$ :

- (1)  $X \subset \mathbb{R}^n$  è *stellato* (cioè esiste  $p \in X$  tale che  $r \cap X$  è connesso per ogni retta  $r$  passante per  $p$ ),
- (2)  $X = C(Y) = Y \times [0, 1] / \sim$  con  $(y, 0) \sim (y', 0) \forall y, y' \in Y$  è il *cono* di uno spazio topologico (non necessariamente connesso)  $Y$ : mostrare inizialmente che  $C(Y)$  è connesso per archi,
- (3)  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0\}$ ,
- (4)  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$ ,
- (5)  $X = \mathbb{R}^n \setminus V$  dove  $V$  è un sottospazio di dimensione  $k$ , con  $0 \leq k < n$ ,
- (6)  $X = \mathbb{C}^n \setminus V$  dove  $V$  è un sottospazio di dimensione  $k$ , con  $0 \leq k < n$ ,
- (7)  $(\star) X = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus P$  dove  $P$  è un sottospazio proiettivo di dimensione  $k$ ,
- (8)  $(\star\star) X = \mathbb{C}^n \setminus (V \cup V')$  dove  $V$  e  $V'$  sono sottospazi distinti di dimensione  $n - 1$ ,
- (9)  $X = S^2 \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}$  e  $X = S^2 \setminus \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ,  
(è la sfera con due o tre buchi)
- (10)  $(\star) X = S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\}$  (è il toro con un buco).

**5.6. Van Kampen.** In altri casi può essere necessario o più opportuno usare Van Kampen:

**Esercizio 5.12.** Si calcoli  $\pi_1(X)$  per i seguenti spazi topologici  $X$ :

- (1)  $X = S(Y) = Y \times [0, 1] / \sim$  con  $(y, 0) \sim (y', 0), (y, 1) \sim (y', 1) \forall y, y' \in Y$   
è la *sospensione* di uno spazio connesso  $Y$ ,
- (2)  $X$  è una conica semplicemente degenera in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,
- (3)  $(\star\star) X$  è una conica non degenera in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,

- (4) ( $\star\star$ )  $X$  è una cubica riducibile in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  con un solo punto singolare (ci sono due casi da considerare!),
- (5) ( $\star\star\star$ )  $X$  è una cubica liscia in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,
- (6)  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,
- (7) ( $\star$ )  $X = \{(x_1, x_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(0, 0, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_3 - 1)^2 + x_4^2 = 1\}$ ,
- (8) ( $\star$ )  $X = \{(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \cup \{(0, 0, 0, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid (x_4 - 1)^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1\}$ ,
- (9) ( $\star\star$ )  $X = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, (z_1 - 1)(z_2 - 1) = 0\}$ .

## 6. PRESENTAZIONI

**6.1. Prodotto libero.** Il prodotto libero  $G * H$  fra due gruppi  $G$  e  $H$  è definito come l'insieme delle parole costruibili con le lettere date dall'insieme  $G \cup H$ , quozientato da una relazione di equivalenza  $\sim$  che ora definisco. Abbiamo  $p \sim p'$  se la parola  $p'$  è ottenibile da  $p$  tramite una sequenza finita di mosse di questo tipo:

- una sottoparola “ $g_1g_2$ ” di  $p$ , fatta di due lettere  $g_1, g_2 \in G$  è sostituita con la lettera “ $g_3$ ”, dove  $g_3 = g_1 \cdot g_2 \in G$  rispetto all'operazione “ $\cdot$ ” di  $G$  (e analogo mossa se  $p$  contiene una sottoparola “ $h_1h_2$ ” di elementi  $h_1, h_2$  di  $H$ );
- cancellazione di una lettera di  $p$  corrispondente all'elemento identità di  $G$  o di  $H$ ;
- l'inversa di una delle due mosse già descritte (quindi sostituire  $g_3$  con  $g_1g_2$  se  $g_1 \cdot g_2 = g_3$ , e aggiungere elementi neutri a piacimento).

L'insieme  $G * H$  è dotato di una operazione binaria molto semplice: date due parole  $p, p'$ , definiamo la parola  $pp'$  come la parola ottenuta concatenando  $p$  e  $p'$ .

**Proposizione 6.1.** *L'operazione di concatenamento è ben definita e  $G * H$  è un gruppo.*

*Dim.* Se  $p_1 \sim p_2$  e  $p'_1 \sim p'_2$  allora  $p_2$  e  $p'_2$  sono ottenuti con delle mosse da  $p_1$  e  $p'_1$ . Quindi  $p_2p'_2$  è anch'egli ottenuto da  $p_1p'_1$  tramite mosse. Quindi l'operazione di concatenamento è ben definita al quoziente.

Dimostriamo ora che  $G * H$  è un gruppo. La proprietà associativa è ovvia. L'elemento neutro è semplicemente la parola vuota. Resta solo l'esistenza dell'inversa: data una parola  $p = a_1 \cdots a_k$ , dove ogni  $a_i$  sta in  $G$  o in  $H$ , la sua inversa è semplicemente  $p^{-1} = a_k^{-1} \cdots a_1^{-1}$ : infatti  $pp^{-1} = a_1 \cdots a_k a_k^{-1} \cdots a_1^{-1}$

è equivalente a  $a_1 \cdots a_{k-1} a_{k-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$ , e cancellando coppie adiacenti opposte dopo altri  $k - 1$  passaggi si ottiene la parola vuota.  $\square$

**Proposizione 6.2.** *Ogni elemento di  $G * H$  si scrive in modo unico come parola ridotta  $a_1 \dots a_k$ , dove  $a_{2i-1} \in G$  e  $a_{2i} \in H$  per ogni  $i$  (oppure viceversa  $a_{2i-1} \in H$  e  $a_{2i} \in G$  per ogni  $i$ ), e nessun  $a_i$  è l'elemento neutro (di  $G$  o  $H$ ).*

*Dim.* Se una parola  $p$  non è ridotta, può essere trasformata in una parola più corta tramite una delle due mosse. Quindi dopo un numero finito di mosse si ottiene necessariamente una parola ridotta (che può essere anche vuota). Non è difficile vedere che la parola ridotta ottenuta dipende solo da  $p$  (e non dalle mosse scelte). Inoltre se  $p'$  è ottenuto da  $p$  tramite una qualche mossa, è facile vedere che le ridotte di  $p'$  e  $p$  coincidono: quindi ogni classe di parole ha un solo rappresentante ridotto.  $\square$

**Esercizio 6.3.** Il prodotto libero è una operazione commutativa ( $G * H$  e  $H * G$  sono isomorfi) e associativa ( $(G * H) * L$  e  $G * (H * L)$  sono isomorfi). Il gruppo banale è l'elemento neutro, cioè  $G * \{e\} \cong \{e\} * G \cong G$ . (Manca l'esistenza dell'inverso: i gruppi con l'operazione  $*$  formano un *monoide*.)

Il gruppo libero  $F_n$  di rango  $n$  è quindi definito come  $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ , dove  $\mathbb{Z}$  compare  $n$  volte.

**Osservazione 6.4.** Consideriamo per semplicità il caso  $n = 2$ : visto che  $F_2$  non è abeliano (vedi Esercizio 6.5 sotto), abbandoniamo la scrittura additiva per  $\mathbb{Z}$  e usiamo quella moltiplicativa. Scriviamo quindi gli elementi del "primo"  $\mathbb{Z}$  come  $\{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, \dots\}$  e gli elementi del "secondo"  $\mathbb{Z}$  come  $\{\dots, b^{-2}, b^{-1}, b^0, b^1, \dots\}$ , e scriviamo le operazioni in entrambi i gruppi in modo moltiplicativo, così ad esempio abbiamo  $a^3 a^{-2} = a$  e  $bb^2 = b^3$ .

Grazie alla Proposizione 6.2, ogni elemento di  $F_2$  può essere scritto in modo unico come una parola  $p$  aventi lettere alternativamente del tipo  $a^i$  e  $b^j$ , con esponenti  $i$  e  $j$  sempre diversi da zero. Questi si moltiplicano e quindi si scrivono in forma ridotta nel modo ovvio: ad esempio moltiplicando  $a^2 b^{-1}$  e  $b^1 a^{-1}$  si ottiene  $a^2 b^{-1} b^1 a^{-1} = a^2 a^{-1} = a$ . Analogamente, ogni elemento di  $F_n$  si scrive in modo unico come parola ridotta aventi lettere in  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , ciascuna lettera con un esponente diverso da zero, e con lettere adiacenti sempre distinte.

**Esercizio 6.5.** Se  $G$  e  $H$  sono entrambi non banali allora  $G * H$  contiene infiniti elementi e non è abeliano.

**Esercizio 6.6.** Dimostrare che  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  contiene un sottogruppo di indice 2 isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**6.2. Presentazioni.** Una *presentazione* è una scrittura del tipo

$$\mathcal{P} = \langle g_1, \dots, g_n \mid r_1, \dots, r_s \rangle$$

dove  $r_1, \dots, r_s$  sono parole aventi lettere in  $\{g_1, \dots, g_n\}$  con esponenti interi. La presentazione  $\mathcal{P}$  definisce un gruppo  $G$  nel modo seguente: consideriamo  $F_n$  come il gruppo delle parole in  $\{g_1, \dots, g_n\}$ . Quindi ogni parola  $r_i$  è un elemento di  $F_n$ .

Definiamo quindi  $G$  come  $F_n/N(r_1, \dots, r_s)$ , dove  $N(r_1, \dots, r_s)$  è il *normalizzato* dell'insieme  $\{r_1, \dots, r_s\}$ , cioè il più piccolo sottogruppo normale di  $F_n$  che contiene l'insieme  $\{r_1, \dots, r_s\}$ . Diciamo che  $\mathcal{P}$  è una *presentazione del gruppo*  $G$ , e rimarchiamo il fatto che lo stesso  $G$  ha molte presentazioni diverse. Le lettere  $g_i$  sono i *generatori* e le parole  $r_j$  sono le *relazioni*. Infatti,  $\{g_1, \dots, g_n\}$  è un insieme di generatori per  $G$  (cioè ogni elemento di  $G$  si scrive come prodotto di questi).

**Esempio 6.7.** Abbiamo i seguenti isomorfismi:

- $\langle g_1, \dots, g_n \mid \rangle \cong F_n$ ,
- $\langle g \mid g^k \rangle \cong \mathbb{Z}_k$
- $\langle g_1, \dots, g_n \mid r_1, \dots, r_s \rangle * \langle g'_1, \dots, g'_{n'} \mid r'_1, \dots, r'_{s'} \rangle \cong \langle g_1, \dots, g_n, g'_1, \dots, g'_{n'} \mid r_1, \dots, r_s, r'_1, \dots, r'_{s'} \rangle$ ,

**Esercizio 6.8.** Abbiamo  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . La relazione  $aba^{-1}b^{-1}$  si scrive anche  $[a, b]$  e si chiama il *commutatore* di  $a$  e  $b$ .

**Esercizio 6.9.** Il *gruppo diedrale*  $D_{2k}$  definito come  $\langle r, s \mid r^k, s^2, rsrs \rangle$  è isomorfo al gruppo delle simmetrie del  $k$ -gono regolare ( $k \geq 3$ ): basta considerare  $r$  come la rotazione antioraria di angolo  $2\pi/k$  e  $s$  come la simmetria rispetto all'asse  $x$ . Si dimostri che  $D_{2k}$  ha ordine  $2k$ , e che non è abeliano.

**Osservazione 6.10.** Aggiungendo una relazione  $r$  ad una presentazione, si quozienta il gruppo per il normalizzato di  $r$ . Quindi ad esempio  $D_{2k}$  è il quoziente di  $\langle r, s \mid r^k, s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_k * \mathbb{Z}_2$  tramite la relazione  $rsrs$ . Ma è anche il quoziente di  $\langle r, s \mid s^2, rsrs \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  (isomorfismo da dimostrare!) tramite la relazione  $r^k$ .

Può capitare che la relazione  $r$  aggiunta non cambi il gruppo: questo succede se  $r$  è già contenuta nel normalizzato delle relazioni già presenti. Un facile esempio:  $\langle a \mid a^6, a^8 \rangle \cong \langle a \mid a^6, a^8, a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$  perché  $a^2$  è contenuto nel sottogruppo di  $\mathbb{Z}$  generato da  $a^6$  e  $a^8$ .

**Esercizio 6.11.** Dimostrare che le seguenti presentazioni danno il gruppo banale:  $\langle a \mid a^p, a^q \rangle$  se  $(p, q) = 1$ ,  $\langle a, b \mid ab^5, b \rangle$ ,  $\langle a, b \mid ab^2, ba^3, a^7 \rangle$ .

**Esercizio 6.12.** Dimostrare che  $\langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$  e  $\langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$  sono isomorfi

**Proposizione 6.13.** *Ogni gruppo finito ha una presentazione. Un gruppo contenente una quantità più che numerabile di elementi non ha una presentazione. Infine,  $\mathbb{Q}$  non ammette una presentazione.*

*Dim.* Se  $G$  è finito, si prendano come generatori tutti i suoi elementi e come relazioni le parole di 3 lettere  $g_1 g_2 g_3^{-1}$  al variare di  $(g_1, g_2) \in G \times G$ , con  $g_3 = g_1 g_2$ . D'altra parte,  $F_n$  contiene una quantità al più numerabile di elementi, e quindi anche ogni suo quoziente. Il gruppo  $\mathbb{Q}$  non ammette una presentazione perché non ammette un numero finito di generatori.  $\square$

**Esercizio 6.14.** Scrivere una presentazione per il gruppo simmetrico  $S_n$ , per il gruppo di simmetrie del tetraedro, e del cubo.

**Esercizio 6.15.**  $(\star)$  Dimostrare che se  $G = \langle S \mid R \rangle$  ha più generatori che relazioni allora contiene infiniti elementi.

*Traccia.* Supponiamo che ci siano  $s$  generatori e  $r$  relazioni, e che  $s > r$ . Aggiungiamo alle relazioni  $R$  le seguenti  $s(s-1)/2$  relazioni: per ogni coppia di generatori in  $S$ , aggiungiamo il loro commutatore. Il gruppo che otteniamo è abeliano: è il quoziente di  $\mathbb{Z}^s$  per un sottogruppo generato da  $r$  elementi, che sono gli “abelianizzati” delle relazioni  $R$ . Poiché  $s > r$ , dimostrare che contiene infiniti elementi. Se un quoziente di  $G$  contiene infiniti elementi, allora ne contiene anche  $G$ .  $\square$

**Esercizio 6.16**  $(\star)$ . Dimostrare che  $F_k$  contiene sottogruppi isomorfi a  $F_h$  per ogni  $h, k \geq 2$ .

**Esercizio 6.17**  $(\star\star)$ . Dimostrare che ogni sottogruppo di  $F_k$  è isomorfo ad un  $F_h$ , per qualche  $h$ .

**Esercizio 6.18**  $(\star\star\star)$ . Dimostrare che  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$  è isomorfo al gruppo

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\} / \sim$$

dove gli elementi di  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  sono matrici  $2 \times 2$  a coefficienti interi, e due matrici  $A$  e  $B$  sono equivalenti  $A \sim B$  se e solo se  $B = \pm A$ .

*Traccia.* Abbiamo  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ . Dimostrare che anche  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle A, B \mid A^2, B^3 \rangle$  dove  $A$  e  $B$  sono le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Si deve dimostrare che  $A$  e  $B$  generano il gruppo, e che non ci sono ulteriori relazioni oltre a  $A^2 = B^3 = 0$ .)  $\square$

**6.3. Van Kampen.** Enunciamo Van Kampen usando le presentazioni:

**Teorema 6.19.** *Supponiamo uno spazio topologico  $X$  sia unione di due aperti connessi per archi  $X_1, X_2$ , con intersezione  $X_1 \cap X_2$  connessa per archi, e  $x \in X_1 \cap X_2$ . Supponiamo:*

$$\pi_1(X_1 \cap X_2, x) \cong \langle S \mid R \rangle, \quad \pi_1(X_1, x) \cong \langle S_1 \mid R_1 \rangle, \quad \pi_1(X_2, x) \cong \langle S_2 \mid R_2 \rangle.$$

Consideriamo le mappe

$$\psi_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2, x) \rightarrow \pi_1(X_1, x), \quad \psi_2 : \pi_1(X_1 \cap X_2, x) \rightarrow \pi_1(X_2, x)$$

indotte dalle inclusioni. Allora:

$$\pi_1(X, x) \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle$$

dove  $R_S = \{\psi_1(s)(\psi_2(s))^{-1} \mid s \in S\}$ .

**Corollario 6.20.** *Se  $\pi_1(X_2, x) = \{e\}$ , allora  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X_1, x)/N(\text{Im}(\psi_1))$ .*

*Proof.* In questo caso  $S_2 = R_2 = \emptyset$  e  $R_S = \{\psi_1(s) \mid s \in S\}$ . □

## 7. COMPLESSI CELLULARI

**7.1. Celle.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\psi : \partial D^n \rightarrow X$  una mappa continua. Definiamo lo spazio topologico  $X' = X \cup_\psi D^n$  ottenuto *attaccando una  $n$ -cella  $D^n$  a  $X$*  come  $X' = (X \cup D)/\sim$ , dove  $y \sim \psi(y)$  per ogni  $y \in \partial D^n$ .

**Osservazione 7.1.** Lo spazio  $X' = X \cup_\psi D^n$  è l'unione disgiunta del chiuso  $X$  e della palla aperta  $B^n \subset D^n$ . La mappa  $\psi : \partial D^n \rightarrow X$  dice come questi due insiemi sono “attaccati” fra loro: la  $\psi$  può anche essere non iniettiva e in generale molto complicata.

**Esercizio 7.2.** Sia  $X'$  ottenuto attaccando una  $n$ -cella ad  $X$ .

- Se  $X$  è connesso, allora  $X'$  è connesso,
- Se  $X$  è compatto, allora  $X'$  è compatto,
- Se  $X$  è un punto, allora  $X' \cong S^n$ ,

**Lemma 7.3.** *Se  $\psi_0, \psi_1 : \partial D^n \rightarrow X$  sono mappe omotope, allora  $X_0 = X \cup_{\psi_0} D^n$  e  $X_1 = X \cup_{\psi_1} D^n$  sono spazi topologici omotopi.*

*Dim.* Dimostriamo che  $X_0$  e  $X_1$  sono entrambi contenuti in uno spazio più grande  $\bar{X}$ , e che sono entrambi retratti di deformazione di  $\bar{X}$ : ne segue che sono entrambi omotopi a  $\bar{X}$ , e che quindi sono omotopi tra loro.

Lo spazio  $\bar{X}$  è il seguente: sia  $\Psi : \partial D^n \times [0, 1] \rightarrow X$  l'omotopia che collega  $\psi_0$  e  $\psi_1$ . Definisco  $\bar{X}$  come  $X \cup_\Psi (D^n \times [0, 1])$ , cioè come lo spazio ottenuto attaccando a  $X$  una “torta”  $D^n \times [0, 1]$ , tramite la mappa  $\Psi$ , che incolla quindi

la parete verticale  $\partial D^n \times [0, 1]$  della torta su  $X$ . Gli spazi  $X_0$  e  $X_1$  sono naturalmente contenuti in  $\bar{X}$  come  $X \cup_{\Psi} (D^n \times \{0\})$  e  $X \cup_{\Psi} (D^n \times \{1\})$ .

Costruiamo ora una deformazione di  $\bar{X}$  su  $X_1$ . La definiamo solo sulla torta  $D^n \times [0, 1]$ , e lasciamo fissi tutti i punti di  $X$ . Per fare ciò, dobbiamo anche lasciare fissi tutti i punti della parete laterale  $\partial D \times [0, 1]$ , visto che è incollata in qualche modo a  $X$  (e può essere incollata in modo brutto: ad esempio la mappa  $\Psi$  può non essere iniettiva). Consideriamo  $D^n \times [0, 1]$  dentro  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Prendiamo il punto  $p = (0, \dots, 0, -1)$ , che sta sotto la torta: le semirette uscenti da  $p$  intersecano la torta in segmenti, e definiscono quindi una deformazione in direzione uscente da  $p$ , che retrae la torta  $D^n \times [0, 1]$  su  $\partial D^n \times [0, 1] \cup D^n \times \{1\}$  (le pareti e il tetto della torta). Questa deformazione tiene fissi tutti i punti delle pareti, e quindi si estende ad una deformazione di  $\bar{X}$  su  $X_1$ , che è l'unione di  $X$  e del tetto. Analogamente si costruisce una deformazione che retrae  $\bar{X}$  su  $X_0$ , che è l'unione di  $X$  e del pavimento.  $\square$

**Esercizio 7.4.** Uno spazio ottenuto attaccando una 2-cella su  $D^2$  è omotopo a  $S^2$ .

**7.2. Spazi localmente conici.** Da questo momento in poi, per evitare patologie, gli spazi avranno una struttura locale buona: diremo che uno spazio topologico  $X$  è *localmente conico* se ogni punto  $p \in X$  ha un intorno  $U(p)$  che è un cono su un compatto, di cui  $p$  è il vertice. Più formalmente,  $(U(p), p) \cong (C(Y), v)$  dove  $C(Y)$  è il cono su un compatto  $Y$  con vertice  $v$ . Il compatto  $Y$  può essere sconnesso, ma  $C(Y)$  sarà sempre connesso.

**Proposizione 7.5.** *Sia  $X$  localmente conico.*

- ogni punto ha un sistema di intorni conici aperti omeomorfi tra loro,
- ogni punto ha un sistema di intorni conici compatti omeomorfi tra loro,
- i punti sono chiusi (cioè  $X$  è  $T_1$ ),
- $X$  è connesso per archi se e solo se è connesso,
- le componenti connesse di  $X$  sono aperte e chiuse.

*Dim.* Ogni punto ha un intorno omeomorfo a  $C(Y) = Y \times [0, 1] / \sim$  per qualche  $Y$ , con  $(y, 0) \sim (y', 0)$  per ogni  $y, y' \in Y$ . Un sistema di intorni aperti per il vertice è dato dai “sottoconi”  $Y \times [0, 1/t] / \sim$ , per  $t \in \mathbb{N}$ . Per verificare questo fatto, dobbiamo dimostrare che qualsiasi aperto  $U$  contenente il vertice contiene uno di questi sottoconi. Possiamo supporre che  $U$  sia un aperto dentro  $C(Y)$ . Poiché  $Y$  è compatto,  $Y \times [0, 1]$  è compatto, e quindi anche  $C(Y)$ . Quindi  $K = C(Y) \setminus U$  è un chiuso dentro un compatto, e quindi è compatto pure lui. È ricoperto dagli aperti  $\{Y \times (\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t-1})\}_{t \in \mathbb{N}, t \geq 2}$ . Quindi

esiste un sottoricoprimento finito: allora esiste un  $T \in \mathbb{N}$  tale che  $Y \times (1/T, 1)$  contiene  $K$ . In altre parole,  $Y \times [0, 1/T]$  è contenuto in  $U$ .

Un sistema di intorni compatti è dato semplicemente da  $Y \times [0, 1/t]/ \sim$ . Dimostriamo gli altri punti. L'intersezione di tutti gli intorni conici aperti di un punto  $x \in X$  è  $x$ : quindi  $x$  è l'intersezione di tutti gli aperti che lo contengono, e quindi è chiuso. Sia  $A$  una componente connessa per archi di  $X$ . Dimostriamo che è aperta: se  $x \in A$ , allora  $U(x) \subset A$  per ogni intorno conico  $U(x)$  di  $x$  (perché  $U(x)$  è connesso per archi). Tutte le componenti connesse per archi di  $X$  sono aperte, e quindi coincidono con le componenti connesse.  $\square$

**Esercizio 7.6.** Dimostrare che i seguenti spazi  $X$  sono localmente conici:

- (1)  $X$  è una *varietà topologica* (cioè ogni punto ha un intorno omeomorfo a una palla  $B^n$ ),
- (2)  $X$  è l'unione finita di rette in  $\mathbb{R}^2$ ,
- (3)  $(\star)$   $X$  è l'unione finita di piani in  $\mathbb{R}^3$ ,
- (4)  $(\star\star)$   $X$  è l'unione finita di sottospazi affini in  $\mathbb{R}^n$ ,
- (5)  $X$  è un sottoinsieme aperto di uno spazio localmente conico,
- (6)  $(\star\star\star)$   $X = Y \times Z$  dove  $Y$  e  $Z$  sono localmente conici,
- (7)  $(\star\star\star)$   $X$  è una curva in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

**Esercizio 7.7.** Descrivere uno spazio topologico che non sia localmente conico.

**Esercizio 7.8**  $(\star)$ . Descrivere uno spazio topologico che sia localmente connesso (cioè ogni punto ha un sistema di intorni connessi) ma non localmente conico.

**Esercizio 7.9**  $(\star\star)$ . Descrivere uno spazio topologico che sia localmente semplicemente connesso (cioè ogni punto ha un sistema di intorni semplicemente connessi) ma non localmente conico.

### 7.3. Bouquet e 1-celle.

**Definizione 7.10.** Il *bouquet* (o *prodotto wedge*)  $X \vee Y$  di due spazi topologici  $X$  e  $Y$  connessi per archi è uno spazio ottenuto identificando un punto  $x$  di  $X$  con un punto  $y$  di  $Y$ .

**Osservazione 7.11.** Lo spazio  $X \vee Y$  dipende dalla scelta di  $x$  e  $y$ , ma con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 7.3 si vede che la sua classe di omotopia non dipende da questa scelta. In particolare,  $\pi_1(X \vee Y)$  è ben determinato.

**Esercizio 7.12.** Se  $X$  e  $Y$  sono localmente conici, allora lo è anche  $X \vee Y$ .

**Proposizione 7.13.** *Supponiamo  $X$  e  $Y$  localmente conici e connessi. Allora  $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ .*

*Dim.* Siano  $U(x) \subset X$  e  $U(y) \subset Y$  intornoi conici contenenti rispettivamente  $x$  e  $y$ . Gli insiemi  $X$  e  $Y$  (e quindi  $U(x)$  e  $U(y)$ ) possono essere identificati in modo canonico a sottoinsiemi di  $X \vee Y$ . Questi non sono aperti in generale, quindi per usare Van Kampen prendiamo gli insiemi  $X' = X \cup U(y)$  e  $Y' = Y \cup U(x)$ , che sono aperti e connessi in  $X \vee Y$ . La loro intersezione è  $U(y) \cup U(x)$ . Poiché  $U(x)$  e  $U(y)$  sono conici, si retraggono fortemente su  $x$  e  $y$ , e quindi gli spazi  $X', Y'$  e  $U(y) \cup U(x)$  si retraggono fortemente su  $X, Y$  e il punto  $y \sim x$ . Quindi Van Kampen ci dice che  $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ .  $\square$

**Teorema 7.14.** *Sia  $X'$  connesso, ottenuto attaccando una 1-cella ad uno spazio  $X$  localmente conico. Se  $X$  è connesso, allora*

$$\pi_1(X') = \pi_1(X) * \mathbb{Z}.$$

*Altrimenti  $X$  ha due componenti connesse  $X_1$  e  $X_2$ , e*

$$\pi_1(X') = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2).$$

*Dim.* Sia  $\psi : \partial D^1 \rightarrow X$  la mappa di incollamento della 1-cella. Quindi l'immagine di  $\psi$  consta di due punti  $\psi(-1)$  e  $\psi(1)$  (che possono coincidere). Poiché  $X'$  è connesso, è facile vedere che  $X$  ha una o due componenti connesse, e nel secondo caso ciascuna componente contiene uno dei due punti  $\psi(-1)$  e  $\psi(1)$ .

Se  $X$  è connesso,  $\psi(-1)$  e  $\psi(1)$  sono collegati da un arco  $\alpha \subset X$ . Posso quindi muovere  $\psi(1)$  lungo l'arco  $\alpha$  finché non coincide con  $\psi(-1)$ : in questo modo quindi cambio con una omotopia la  $\psi$  con un'altra  $\psi'$  tale che  $\psi'(-1) = \psi'(1)$ . A questo punto  $X' \cong X \vee S^1$ , e quindi  $\pi_1(X') \cong \pi_1(X) * \mathbb{Z}$ .

Se  $X$  è sconnesso, allora  $X' \cong (X_1 \vee D^1) \vee X_2$  e quindi  $\pi_1(X') \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(D^1) * \pi_1(X_2) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$ .  $\square$

**Esercizio 7.15** ( $\star \star \star$ ). Sia  $X' = X/\sim$  ottenuto da  $X$  connesso e localmente conico identificando due punti  $x$  e  $x'$  distinti di  $X$ . Allora  $\pi_1(X') \cong \pi_1(X) * \mathbb{Z}$ .

*Traccia.* Dimostrare che  $X'$  è omotopo a  $X \cup_\psi D^1$  dove  $\psi(-1) = x$  e  $\psi(1) = x'$ , scrivendo esplicitamente le omotopie tra i due spazi.  $\square$

**7.4. 2-celle.** Indichiamo con  $N(G)$  il normalizzato di un sottogruppo  $G$ .

**Teorema 7.16.** *Sia  $X$  connesso e  $X' = X \cup_\psi D^2$  ottenuto attaccando una 2-cella a  $X$ . Allora:*

$$\pi_1(X', x) = \pi_1(X, x) /_{N(\text{Im} \psi_*)},$$

dove  $\psi_* : \pi_1(\partial D^2, p) \rightarrow \pi_1(X, x)$  e  $p, x$  sono tali che  $\psi(p) = x$ .

*Dim.* Usiamo Van Kampen con gli aperti

$$X_1 = X \cup_\psi (D^2 \setminus \{(0, 0)\}), \quad X_2 = B^2,$$

$$X_1 \cap X_2 = B^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

dove  $B^2 \subset D^2$  è la palla aperta dentro  $D^2$ , si veda l'Osservazione 7.1. Prendiamo come punto base un punto qualsiasi  $x_1$  in  $X_1 \cap X_2$ . Dal Corollario 6.20 otteniamo:

$$\pi_1(X', x') \cong \pi_1(X_1, x') / N(\text{Im}\psi_1)$$

dove  $\psi_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2, x') \rightarrow \pi_1(X')$  è indotta dall'inclusione. Notiamo ora che  $\partial D^2$  è un retratto di deformazione forte di  $D^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Possiamo estendere questa retrazione a  $X_1$ , lasciando fermi tutti i punti di  $X$ , e supporre che la retrazione mandi  $x'$  su  $x$ . Quindi  $X$  è un retratto di deformazione forte di  $X_1$ . Inoltre è facile vedere che  $\text{Im}\psi_1 = \text{Im}\psi_*$ : possiamo quindi scrivere:

$$\pi_1(X', x') \cong \pi_1(X, x) / N(\text{Im}\psi_*).$$

□

**Esercizio 7.17.** Se  $X'$  è ottenuto attaccando una 2-cella ad uno spazio  $X$  semplicemente connesso, allora  $X'$  è semplicemente connesso.

**Esercizio 7.18.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  fissato. Consideriamo lo spazio  $X$  ottenuto attaccando a  $S^1$  una 2-cella  $D^2$  tramite la mappa  $\psi : \partial D^2 \rightarrow S^1$  data da  $\psi(e^{ti}) = \psi(e^{nti})$ . Dimostrare che  $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_n$ .

*Traccia.* In questo caso  $\psi_* : \pi_1(\partial D^2) \rightarrow \pi_1(S^1)$  è la mappa  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  data da  $x \mapsto nx$ . Quindi  $\mathbb{Z} / N(\text{Im}\psi_*) \cong \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ . □

**Esercizio 7.19** (★). Calcolare  $\pi_1(X)$  per i seguenti spazi  $X$ :

- (1)  $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1, |w| = 1\} \cup \{(1, w) \mid |w| \leq 1\}$ ;
- (2)  $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1, |w| = 1\} \cup \{(1, w) \mid |w| \leq 1\} \cup \{(z, 1) \mid |z| \leq 1\}$ ;

*Traccia.* Mostrare che  $X$  è ottenuto attaccando una o due 2-celle al toro  $S^1 \times S^1$ , che “uccidono” uno o entrambi i generatori di  $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . □

**7.5. Celle di dimensione alta.** Attaccando celle di dimensione più alta di due non si modifica il gruppo fondamentale:

**Teorema 7.20.** *Sia  $X$  connesso e  $X' = X \cup_{\psi} D^n$  ottenuto attaccando una  $n$ -cella a  $X$ , con  $n \geq 3$ . Allora:*

$$\pi_1(X') = \pi_1(X).$$

*Dim.* Seguiamo la dimostrazione del Teorema 7.16: usiamo Van Kampen con gli aperti

$$X_1 = X \cup_{\psi} (D^n \setminus \{(0, 0)\}), \quad X_2 = B^n,$$

$$X_1 \cap X_2 = B^n \setminus \{(0, 0)\},$$

dove  $B^n \subset D^n$  è la palla aperta dentro  $D^n$ . Come sopra,  $X_2$  è semplicemente connesso e  $\pi_1(X) \cong \pi_1(X_1)$ . Inoltre, poiché  $n \geq 3$ , lo spazio

$$X_1 \cap X_2 = B^n \setminus \{(0, 0)\} \cong S^{n-1} \times (0, 1)$$

è semplicemente connesso. Quindi  $\pi_1(X') \cong \pi_1(X_1) \cong \pi_1(X)$ . □

**7.6. Complessi di celle.** Un *complesso di celle* è la descrizione di uno spazio topologico connesso  $X$  come attaccamento successivo di un numero finito di celle, di dimensione crescente, a partire da un numero finito di punti (che chiamiamo le 0-celle). In altre parole,  $X$  è ottenuto prendendo alcune 0-celle (cioè punti), quindi attaccando alcune 1-celle (cioè archi), e poi delle 2-celle, e così via.

**Definizione 7.21.** Un *grafo* è un complesso di celle composto di sole 0- e 1-celle.

**Esercizio 7.22.** Trovare due grafi non omeomorfi ma con lo stesso gruppo fondamentale.

Gli esercizi seguenti si risolvono per induzione sul numero di 1-celle:

**Esercizio 7.23.** Se  $X$  è un grafo allora  $\pi_1(X) = F_n$  per qualche  $n$ .

**Esercizio 7.24.** Sia  $X$  un grafo. Dimostrare che  $\pi_1(X)$  è semplicemente connesso se e solo se per ogni punto  $x \in X$  lo spazio  $X \setminus \{x\}$  è sconnesso. (In questo caso  $X$  si chiama un *albero*.)

**Esercizio 7.25.** Dimostrare che un grafo è localmente conico (ogni punto è il cono su un insieme finito di punti).

**Esempio 7.26.** Molti spazi noti ammettono descrizioni differenti come complessi cellulari:

- La sfera  $S^n$  si ottiene attaccando una  $n$ -cella  $D^n$  ad un punto: la mappa di incollamento  $\psi$  manda tutto  $\partial D^n$  sul punto; quindi  $S^n$  si ottiene con una 0-cella ed una  $n$ -cella;
- La sfera  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$  si ottiene anche attaccando alla sfera “equatoriale”  $S^n \cap \{x_{n+1} = 0\} \cong S^{n-1}$  due  $n$ -celle, date dagli emisferi nord  $S^n \cap \{x_{n+1} > 0\}$  e sud  $S^n \cap \{x_{n+1} < 0\}$ : in questo caso le mappe di incollamento sono omeomorfismi; per induzione su  $n$  abbiamo una descrizione di  $S^n$  con due 0-celle, due 1-celle,  $\dots$  e due  $n$ -celle;
- Il toro  $S^1 \times S^1$ , visto come quoziente del quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]/\sim$  tramite:

$$(m, -1) \sim (m, 1), \quad (-1, n) \sim (1, n), \quad \forall m, n,$$

si ottiene con una 0-cella, data dai vertici del quadrato (tutti identificati tramite  $\sim$ ), due 1-celle, date dai bordi verticali e orizzontali (identificati a coppie), e una 2-cella data dall’interno.

Le 0- e 1-celle formano uno spazio omeomorfo a  $S^1 \vee S^1$ , avente  $\pi_1 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid \rangle$ . La 2-cella contribuisce con la relazione  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ . Quindi  $\pi_1(S^1 \times S^1) = \langle a, b \mid [a, b] \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

- La *bottiglia di Klein* è invece lo spazio  $[-1, 1] \times [-1, 1]/\sim$  dove

$$(m, -1) \sim (m, 1), \quad (-1, n) \sim (1, -n), \quad \forall m, n;$$

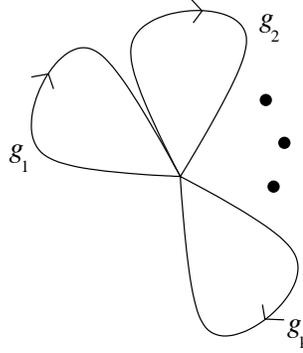
si ottiene, come il toro, con una 0-cella, due 1-celle, e una 2-cella. In questo caso però la 2-cella contribuisce con la relazione  $abab^{-1}$ , e quindi  $\pi_1(\text{Klein}) = \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$ .

Concludiamo questa sezione con il seguente risultato:

**Teorema 7.27.** *Se  $X$  è un complesso di celle, allora  $\pi_1(X)$  ammette una presentazione  $\langle S \mid R \rangle$ , dove i generatori corrispondono ad alcune 1-celle, e le relazioni corrispondono alle 2-celle.*

*D'altra parte, se un gruppo  $G$  ha una presentazione  $\langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_h \rangle$ , allora esiste un complesso di celle  $X$  avente  $\pi_1(X) = G$ .*

*Proof.* La prima parte segue dai Teoremi 7.14, 7.16 e 7.20. Dimostriamo la seconda parte: sia  $X = \vee_k S^1$  il bouquet di  $k$  cerchi, come in Fig. 3, in cui ogni cerchio è orientato arbitrariamente e corrisponde ad un generatore  $g_i$ . Partiamo quindi con una presentazione  $\mathcal{P} = \langle g_1, \dots, g_k \mid \rangle$  per  $\pi_1(X)$ . Per  $i = 1, \dots, h$  crescente, attacchiamo a  $X$  una 2-cella  $D^2$ , tramite una qualsiasi mappa  $\psi : \partial D^2 \rightarrow X$  che segua le lettere che compongono la relazione  $r_i$ . Il Teorema 7.16 implica che l'effetto della 2-cella sul  $\pi_1$  è proprio aggiungere la



**Figure 3:** Bouquet  $\vee_k S^1$  di cerchi attaccati per un punto, orientati, e con un generatore  $g_i$  associato ad ogni cerchio.

relazione  $r_i$  a  $\mathcal{P}$ . Dopo aver attaccato tutte le 2-celle otteniamo un complesso  $X$  con  $\pi_1$  avente presentazione  $\langle g_1, \dots, g_k \mid r_1, \dots, r_h \rangle$ , come richiesto.  $\square$

## 8. ESERCIZI MISTI

**Esercizio 8.1.** Sia  $X = p_1 \cup p_2$  connesso, unione di due piani in  $\mathbb{R}^3$ . Mostrare che  $X$  è semplicemente connesso.

**Esercizio 8.2.** Sia  $X = p_1 \cup p_2 \cup p_3$  connesso, unione di tre piani  $p_1, p_2, p_3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Mostrare che siamo in uno dei casi seguenti:

- due dei tre piani sono paralleli, e  $X$  è semplicemente connesso,
- i 3 piani si intersecano in un punto o in una retta, e  $X$  è semplicemente connesso,
- ogni coppia di piani si interseca in una retta, e le tre rette che si ottengono sono tutte parallele: in questo caso  $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ .

**Esercizio 8.3.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  compatto e  $r \subset \mathbb{R}^n$  una retta tale che  $X \cap r$  è connesso. Allora  $\pi_1(X \cup r) = \pi_1(X)$ .

**Esercizio 8.4.** Calcolare  $\pi_1(X)$  per i seguenti sottoinsiemi  $X$  di  $\mathbb{R}^3$ :

- (1)  $X = S^2 \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ ,
- (2)  $X = S^2 \setminus \{x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ ,
- (3)  $X = D^3 \setminus \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1/2\}$ ,
- (4)  $(\star) X = D^3 \setminus \{x^2 + y^2 < 1/2\}$ ,
- (5)  $X$  è la superficie di rotazione  $T$  del cerchio  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  attorno all'asse  $y$ ,

- (6) (★)  $X$  è l'unione della superficie di rotazione  $T$  del punto precedente e del disco  $\{x^2 + z^2 \leq 1, y = 0\}$ ,
- (7) (★)  $X$  è l'unione della superficie di rotazione  $T$  del punto sopra e di uno dei tre piani coordinati (ci sono essenzialmente due casi da considerare),
- (8) (★)  $X = \mathbb{R}^3 \setminus (r \cup r')$  dove  $r$  e  $r'$  sono due rette (considerare i casi in cui si intersecano o no).

**Esercizio 8.5.** Mostrare che  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \cong D^n/\sim$ , dove  $x \sim x'$  se e solo se  $x = x'$  oppure  $|x| = 1$  e  $x = -x'$ .

*Traccia.* Considerare la funzione  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  continua data da

$$F(x_1, \dots, x_n) = \left[ 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2, x_1, \dots, x_n \right].$$

Mostrare che la  $F$  è suriettiva, e che  $F(x) = F(x')$  se e solo se  $x \sim x'$ . Poiché  $D^n$  e  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  sono compatti, la  $F$  è chiusa. Quindi induce un omeomorfismo tra  $D^n/\sim$  e  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ .  $\square$

**Esercizio 8.6.** Mostrare che  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \cong S^n/\sim$ , dove  $x \sim x'$  se e solo se  $x = \pm x'$ .

**Esercizio 8.7.** Lo spazio proiettivo  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  è ottenuto attaccando una  $n$ -cella a  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ .

*Traccia.* Usando l'esercizio 8.5,  $D^n/\sim$  è ottenuto attaccando  $D^n$  al bordo  $\partial D^n/\sim$ . Ma l'esercizio 8.6 ci dice che il bordo  $\partial D^n/\sim$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ .  $\square$

**Esercizio 8.8.** Lo spazio proiettivo  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  si ottiene come complesso di celle, con una 0-cella, una 1-cella, ... e una  $n$ -cella. Dedurre che  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)$  per ogni  $n > 2$ .

**Esercizio 8.9.** Lo spazio proiettivo  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  è omeomorfo allo spazio costruito nell'esercizio 7.18 per  $n = 2$ . Dedurre che  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$  per ogni  $n > 1$ .

**Esercizio 8.10** (★). Lo spazio proiettivo complesso  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è ottenuto con una 0-cella, una 2-cella, ... e una  $2n$ -cella. Dedurre che è semplicemente connesso.

**Esercizio 8.11.** Gli spazi  $S^2$ ,  $B^2$ ,  $D^2$ , il toro e  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  sono tutti non omeomorfi fra loro.

**Esercizio 8.12** (★). La bottiglia di Klein non è omeomorfa a nessuno degli spazi elencati nell'esercizio precedente.

*Traccia.* Mostrare che i gruppi fondamentali hanno abelianizzati diversi.  $\square$

**Esercizio 8.13.** Gli spazi  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ ,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \times S^2$  e  $S^1 \times S^3$  sono tutti non omeomorfi tra loro.

**Esercizio 8.14.** Gli spazi  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  sono tutti non omeomorfi tra loro (non abbiamo ancora gli strumenti per verificare ad esempio che  $\mathbb{R}^3 \not\cong \mathbb{R}^4$ ).

**Esercizio 8.15.** Gli spazi  $S^1$ ,  $S^2$  e  $S^3$  sono tutti non omeomorfi tra loro.

**Esercizio 8.16** ( $\star$ ). Descrivere il toro tridimensionale  $S^1 \times S^1 \times S^1$  come quoziente del cubo  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]/\sim$ .

**Esercizio 8.17.** Sia  $M$  il *nastro di Möbius*, dato quozientando il quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]/\sim$  tramite  $(-1, n) \sim (1, -n)$  per ogni  $n$ . Mostrare che esiste un retratto forte di deformazione di  $M$  su  $[-1, 1] \times \{0\}$ , che è omeomorfo a  $S^1$ .

**Esercizio 8.18** ( $\star$ ). Benché il nastro di Möbius e l'*anello*  $S^1 \times [-1, 1]$  abbiano lo stesso  $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$ , non sono omeomorfi.

**Esercizio 8.19** ( $\star$ ). Sembra naturale dire che il nastro di Möbius e l'anello sono distinti da questa proprietà: se cammino lungo il nastro di Möbius in una direzione, dopo aver fatto un giro mi trovo dall'altra parte, mentre questo non accade per l'anello. È corretto? In altre parole, questa proprietà è intrinseca, e quindi distingue veramente i due spazi, o dipende dal fatto che li pensiamo sempre dentro a  $\mathbb{R}^3$ ?

*Risposta.* Non è intrinseca! Ad esempio, si consideri lo spazio  $X = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]/\sim$  ottenuto quozientando il cubo tramite  $(a, b, -1) \sim (-a, b, 1)$ . Il sottospazio  $\{0\} \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  è un anello, ma se ci camminiamo sopra (stando dentro  $X$ ), dopo un giro ci troviamo a testa in giù. E inoltre  $[-1, 1] \times \{0\} \times [-1, 1]$  è un nastro di Möbius, ma camminandoci sopra rimaniamo sempre dalla stessa parte!  $\square$

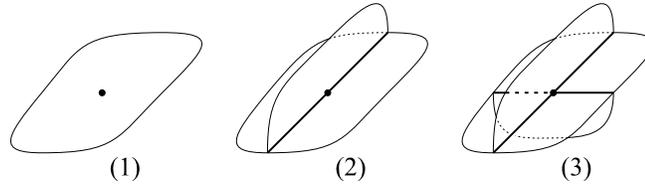
**Esercizio 8.20.** Se  $M$  è una varietà topologica di dimensione  $n \geq 3$  (cioè ogni  $p \in M$  ha un intorno omeomorfo a  $B^n$ ), allora  $\pi_1(M) = \pi_1(M) \setminus \{p\}$  per ogni punto  $p \in M$ .

*Traccia.* Sia  $B$  una palla (cioè un aperto omeomorfo a  $B^n$ ) contenente  $p$ . Usare Van Kampen con gli aperti  $M \setminus \{p\}$  e  $B$ .  $\square$

**Esercizio 8.21** ( $\star$ ). Sia  $X = C([0, 1], [0, 1])$  lo spazio delle funzioni continue da  $[0, 1]$  in sé. Dotiamo  $X$  della norma  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ , e quindi della distanza  $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ , e quindi della topologia indotta da  $d$ . Mostrare che  $X$  è semplicemente connesso.

*Traccia.* Mostrare che il punto dato dalla funzione nulla è un retratto di deformazione forte di  $X$ .  $\square$

**Esercizio 8.22.** Sia  $Y_k$  il cono sullo spazio discreto di  $k$  punti. Mostrare che  $Y_k \cong Y_h$  se e solo se  $k = h$ .



**Figure 4:** Coni su grafi.

**Esercizio 8.23** ( $\star$ ). Convincersi (senza formule, solo visivamente) che gli spazi descritti in Fig. 4 sono rispettivamente omeomorfi al cono su

- (1)  $S^1$ ,
- (2)  $S^1$  con un diametro, cioè  $S^1 \cup \{y = 0, |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ,
- (3) il grafo Mercedes  $\textcircled{\text{M}}$ .

**Esercizio 8.24.** Se  $X$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ , allora il suo cono  $C(X)$  è omeomorfo ad un sottospazio di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Ricordiamo che un grafo  $X$  è un complesso di celle di dimensione 1. Definiamo  $\chi(X)$  come il numero di 1-celle meno il numero di 0-celle. Notiamo che lo stesso  $X$  può essere ottenuto da decomposizioni diverse, aventi un numero diverso di 0- e 1-celle. La quantità  $\chi(X)$  è però ben definita grazie al seguente esercizio.

**Esercizio 8.25.** Se  $X$  è un grafo, allora  $\pi_1(X) \cong F_{1-\chi(X)}$ .

*Traccia.* Fare una induzione sul numero di 1-celle. □

In particolare, se  $X$  è un grafo abbiamo  $\chi(X) \leq 1$ , e  $X$  è un albero se e solo se  $\chi(X) = 1$  (vedi Esercizio 7.24).

**Esercizio 8.26** ( $\star$ ). Se  $X$  è un grafo con  $\chi(X) = 0$ , allora  $X$  è omotopo a  $S^1$ .

**Esercizio 8.27** ( $\star$ ). Un grafo  $X$  è omotopo ad un bouquet  $\vee_{1-\chi(X)} S^1$  di  $1 - \chi(X)$  cerchi. In particolare, due grafi  $X$  e  $X'$  sono omotopi se e solo se  $\chi(X) = \chi(X')$ .

## 9. RIVESTIMENTI

In tutta questa sezione gli spazi topologici saranno sempre connessi, e quando serve li supporremo localmente conici. Ricordiamo che uno spazio topologico localmente conico ha sempre un rivestimento universale. Spesso useremo il fatto seguente.

**Lemma 9.1.** *Sia  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  un omeomorfismo locale suriettivo. Allora  $X$  è (localmente conico, localmente contrattile, oppure una varietà topologica) se e soltanto se lo è anche  $\tilde{X}$ .*

*Dim.* Ogni punto di  $X$  è contenuto in un aperto omeomorfo ad un aperto di  $\tilde{X}$ , e viceversa. Questo basta per dimostrare il lemma.  $\square$

Un rivestimento è qualcosa di più di un omeomorfismo locale: il fatto che si possano sollevare i cammini permette di usare in modo potente il gruppo fondamentale. D'altra parte, in generale è facile dimostrare che una mappa è un omeomorfismo locale, e può essere quindi utile usare il seguente risultato per concludere che è un rivestimento:

**Lemma 9.2.** *Sia  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  un omeomorfismo locale suriettivo. Se la controimmagine di ogni punto di  $X$  è un numero finito di punti, allora  $f$  è un rivestimento.*

*Dim.* Sia  $x \in X$ . Per ipotesi la sua controimmagine è fatta di  $n$  punti  $x_1, \dots, x_n \in \tilde{X}$ . Poiché  $f$  è un omeomorfismo locale, ciascun  $x_i$  ha un intorno aperto  $U(x_i)$  tale che  $f|_{U(x_i)} : U(x_i) \rightarrow f(U(x_i))$  è un omeomorfismo. Definiamo  $U(x) = \cap_{i=1}^n f(U(x_i))$ . Ogni  $f(U(x_i))$  è aperto in  $X$ , quindi  $U(x)$  è un intorno aperto di  $x$  in  $X$ . La sua controimmagine è fatta di  $n$  aperti, ciascuno contenuto in un  $U(x_i)$ , tutti omeomorfi a  $U(x)$  tramite  $f$ . Quindi  $f$  è un rivestimento.  $\square$

**Osservazione 9.3.** Perché la dimostrazione del Lemma 9.2 non funziona nel caso in cui ci sia un  $x \in X$  con infiniti punti nella sua controimmagine? In questo caso,  $U(x)$  sarebbe intersezione infinita di intorni aperti, e potrebbe non essere un intorno aperto di  $x$ .

Il numero di fogli di un rivestimento è la cardinalità della controimmagine di un qualsiasi punto (è ben definito perché non dipende dal punto preso). Anche il risultato seguente può essere utile:

**Proposizione 9.4.** *Sia  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento. Sia  $X$  compatto e localmente conico. Allora  $\tilde{X}$  è compatto se e solo se  $f$  ha un numero finito di fogli.*

*Dim.* Supponiamo che  $f$  abbia un numero infinito di fogli. Indichiamo con  $\{x_i\}_{i \in I}$  le controimmagini di un punto  $x \in X$  (quindi  $I$  è un insieme infinito di indici). Esiste un intorno aperto  $U(x)$  la cui controimmagine consiste di intorni aperti  $\{U(x_i)\}_{i \in I}$  dei punti  $\{x_i\}_{i \in I}$ , tutti omeomorfi a  $U(x)$  tramite  $f$ . Prendiamo inoltre l'aperto  $V = X \setminus \{x\}$  (i punti di  $X$  sono chiusi perché  $X$

è localmente conico! Vedi Proposizione 7.5). Gli aperti  $\{U(x_i)\}_{i \in I}$  e  $f^{-1}(V)$  ricoprono  $\tilde{X}$ . Ciascun  $x_i$  è contenuto in uno solo di questi aperti, e quindi non è possibile ricavare un sottoricoprimento finito. Segue che  $\tilde{X}$  non è compatto.

Supponiamo ora che  $f$  abbia un numero finito di fogli, e dimostriamo che in questo caso  $\tilde{X}$  è compatto. Per la Proposizione 7.5 ogni  $x \in X$  ha un intorno  $U(x)$  conico compatto, la cui controimmagine è fatta di intorni a lui omeomorfi. Dal ricoprimento  $\{U(x)\}_{x \in X}$  di  $X$  estraggo un ricoprimento finito, e le controimmagini di questo ricoprimento tramite  $f$  mi danno un ricoprimento finito di  $\tilde{X}$  (perché la fibra è finita). Quindi  $\tilde{X}$  ha un ricoprimento finito di compatti. L'unione finita di compatti è sempre compatta.  $\square$

**9.1. Azioni di gruppi.** Il seguente risultato offre un metodo diretto per costruire rivestimenti:

**Teorema 9.5.** *Sia  $G$  gruppo che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su uno spazio topologico  $X$ . Allora la mappa quoziente  $X \rightarrow X/G$  è un rivestimento.*

*Supponiamo  $\pi_1(X) = \{e\}$ . Allora ogni sottogruppo  $H < G$  induce una composizione  $X \rightarrow X/H \rightarrow X/G$  di rivestimenti, i cui gruppi fondamentali sono isomorfi a  $\{e\} \hookrightarrow H \hookrightarrow G$ .*

**Osservazione 9.6.** Ogni azione di un gruppo finito è propriamente discontinua.

Facciamo alcuni esempi di rivestimento.

**Esempio 9.7.** Le mappe seguenti sono rivestimenti:

- (1)  $f : S^1 \rightarrow S^1$  data da  $f(e^{ti}) = e^{nti}$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}_+$ ,
- (2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  data da  $f(t) = e^{ti}$ ,
- (3)  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  data da  $f(z) = z^n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}_+$ ,
- (4)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  data da  $f(z) = e^{zi}$ ,
- (5)  $f : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  data da  $f(x_0, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n]$ .

*Dim.* Ciascuno di questi rivestimenti è indotto da una azione libera e propriamente discontinua di un gruppo  $G$ . In (1) abbiamo  $G = \mathbb{Z}_n$  che agisce su  $S^1$  tramite rotazioni di angoli multipli di  $2\pi/n$  (si verifica che  $S^1/G \cong S^1$ ). In (2) abbiamo  $G = \mathbb{Z}$  che agisce su  $\mathbb{R}$  tramite traslazioni: l'elemento  $n \in \mathbb{Z}$  agisce come  $\psi_n : x \mapsto x + 2\pi n$ .

Analogamente, in (3)  $G = \mathbb{Z}_n$  agisce su  $\mathbb{C}^*$  tramite rotazioni di angoli multipli di  $2\pi/n$ . Il quoziente  $\mathbb{C}^*/G$  è ancora omeomorfo a  $\mathbb{C}^*$ . E in (4)  $G = \mathbb{Z}$  agisce come traslazioni come in (2). In (5),  $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  e 1 agisce su  $S^n$  come la mappa antipodale.  $\square$

**Osservazione 9.8.** Notiamo che  $f(z) = e^{zi}$  e  $g(z) = e^z$  sono entrambi rivestimenti di  $\mathbb{C}$  su  $\mathbb{C}^*$ . Questi rivestimenti sono però *isomorfi*: la mappa  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  data da  $\psi(z) = iz$  trasforma l'uno nell'altro (infatti  $f = g \circ \psi$ ). Entrambi sono il rivestimento universale di  $\mathbb{C}^*$  (che è difatti unico a meno di isomorfismi), perché  $\mathbb{C}$  è semplicemente connesso.

**Esercizio 9.9.** Consideriamo l'azione di  $G = \mathbb{Z}^2$  su  $\mathbb{R}^2$  via traslazioni, cioè  $(m, n) \in \mathbb{Z}$  manda  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  in  $(a + m, b + n)$ . Mostrare i fatti seguenti:

- lo spazio  $\mathbb{R}^2/G$  è omeomorfo ad un toro;
- sia  $H_{m,n} < G$  il sottogruppo generato da  $(m, 0)$  e  $(0, n)$ : lo spazio  $\mathbb{R}^2/H_{m,n}$  è omeomorfo ad un toro, che riveste il toro  $\mathbb{R}^2/G$  con  $mn$  fogli;
- sia  $H < G$  il sottogruppo generato da  $(1, 1)$  e  $(1, -1)$ : lo spazio  $\mathbb{R}^2/H$  è ancora un toro che riveste il toro  $\mathbb{R}^2/G$  con 2 fogli;
- sia  $H < G$  il sottogruppo generato da  $(p, q)$  e  $(r, s)$ , che supponiamo vettori indipendenti in  $\mathbb{R}^2$ . Allora  $\mathbb{R}^2/H$  è un toro che riveste il toro  $\mathbb{R}^2/G$  con  $\left| \det \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right|$  fogli;
- sia  $H < G$  il sottogruppo generato da  $(p, q) \neq (0, 0)$ : lo spazio  $\mathbb{R}^2/H$  è omeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$  e riveste  $\mathbb{R}^2/G$  con infiniti fogli;
- ogni sottogruppo  $H$  di  $G$  è generato da al più due elementi: quindi uno spazio che riveste un toro è omeomorfo al toro, a  $S^1 \times \mathbb{R}$ , o a  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 9.10.** Consideriamo l'azione su  $\mathbb{R}^2$  del gruppo  $G'$  generato dagli omeomorfismi  $\psi : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$  e  $\phi : (x, y) \mapsto (-x, y + 1/2)$ . Mostrare che:

- $\mathbb{R}^2/G'$  è omeomorfo alla bottiglia di Klein;
- il gruppo  $G$  dell'esercizio precedente, generato da  $\psi$  e  $\phi^2$ , è un sottogruppo di indice 2 in  $G'$ ; quindi  $\mathbb{R}^2/G \rightarrow \mathbb{R}^2/G'$  è un rivestimento del toro sulla bottiglia di Klein a due fogli;
- sia  $H < G'$  il sottogruppo generato da  $\phi$ : chi è  $\mathbb{R}^2/H$ ?

**Esercizio 9.11.** Siano  $p, q$  due interi coprimi. Consideriamo  $S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \{(z, w)\}$  come  $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$ :

- la mappa  $\psi(z, w) = (e^{2\pi i/p} z, e^{2q\pi i/p} w)$ , ristretta a  $S^3$ , definisce un omeomorfismo  $\psi : S^3 \rightarrow S^3$  senza punti fissi;
- poiché  $\psi^p$  è l'identità,  $\psi$  genera una azione di  $\mathbb{Z}_p$  su  $S^3$  libera e propriamente discontinua, il cui quoziente  $L(p, q) = S^3/\mathbb{Z}_p$  è una varietà topologica detta *spazio lenticolare*, avente quindi  $\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}_p$ ;
- ( $\star$ ) se  $q' \equiv q^{\pm 1} \pmod{p}$  allora  $L(p, q)$  e  $L(p, q')$  sono omeomorfi;
- $L(2, 1) \cong \mathbb{RP}^3$ .

**Osservazione 9.12.** Si congettura che una 3-varietà compatta  $M$  avente gruppo fondamentale ciclico sia uno spazio lenticolare. La congettura si spezza in modo naturale in due pezzi:

- (1) caso con gruppo banale: se  $\pi_1(M) = \{e\}$  allora  $M \cong S^3$ ;
- (2) se  $\mathbb{Z}_p$  agisce in modo libero e propriamente discontinuo su  $S^3$ , allora  $S^3/\mathbb{Z}_p \cong L(p, q)$  per qualche  $q$ .

Se entrambe le congetture sono vere, infatti, il rivestimento universale  $\tilde{M}$  è compatto (perchè la fibra è finita) e semplicemente connesso, quindi è  $S^3$  per il punto (1), e quindi  $M \cong L(p, q)$  per il punto (2). Entrambe le congetture sono al momento aperte.

## 9.2. Esercizi vari.

**Esercizio 9.13** ( $\star$ ). Sia  $X$  un grafo con  $k_0$  0-celle e  $k_1$  1-celle. Sia  $\tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento a  $n$  fogli. Allora  $\tilde{X}$  è un grafo con  $nk_0$  0-celle e  $nk_1$  1-celle. Quindi  $\chi(\tilde{X}) = n\chi(X)$  (vedi Esercizio 8.25).

*Traccia.* Ogni 0-cella è un punto, ed ha  $n$  controimmagini: queste sono le 0-celle di  $\tilde{X}$  (se ne ottengono  $nk_0$ ). Il complementare delle 0-celle in  $X$  sono l'unione disgiunta di  $k_1$  segmenti aperti. Ciascun segmento aperto, essendo semplicemente connesso, ha come controimmagine  $n$  segmenti aperti. Ottengo quindi  $nk_1$  segmenti aperti in  $\tilde{X}$ , che formano le 1-celle di  $\tilde{X}$ .  $\square$

**Esercizio 9.14.** Dedurre l'Esercizio 6.17 dall'esercizio precedente.

**Esercizio 9.15** ( $\star$ ). Sia  $X$  il grafo 8, ottenuto attaccando due 1-celle ad un punto. Costruire dei rivestimenti su  $X$  con numero arbitrariamente alto di fogli.

**Esercizio 9.16.** Dedurre l'Esercizio 6.16 dall'esercizio precedente.

**Esercizio 9.17.** ( $\star\star$ ) Dimostrare che il rivestimento universale del grafo 8 è lo spazio  $X$  costruito nel modo seguente: si consideri  $F_2 = \langle a, b \mid \rangle$  con la topologia discreta (quindi è come se fossero infinite 0-celle). Per ogni elemento  $p \in F_2$ , si colleghino  $p$  e  $ap$  con una 1-cella, e anche  $p$  e  $bp$  con un'altra 1-cella (si ottengono infinite 1-celle).

**Esercizio 9.18.** Ogni  $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  continua ha un punto fisso.

**Esercizio 9.19** ( $\star$ ). Ogni  $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow S^1 \times S^1$  continua è omotopa ad una costante.

**Esercizio 9.20.** Non esiste un omeomorfismo locale  $f : S^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ .

**Esercizio 9.21.** Per ogni funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continua mai nulla ed ogni  $n \in \mathbb{N}$  esistono una funzione  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $f = g^n$ , ed una funzione  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $f(z) = e^{h(z)}$ .