ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2016/17 - ESERCIZI SETTIMANALI

1. Esercizi del 10 marzo

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.2. Siano M e N due varietà topologiche e $f\colon M \to N$ un omeomorfismo. Data una struttura liscia su N, esiste un'unica struttura liscia su M tale che f sia un diffeomorfismo.

Esercizio 1.3. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ due atlanti lisci su M. Sia $M = \cup_{i\in I} U_i$ un ricoprimento di aperti U_i. Se le strutture lisce indotte da $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ su ciascun U_i sono equivalenti, allora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono compatibili.

Esercizio 1.4. Concludi la dimostrazione che la mappa $\mathbb{CP}^1 \to S^2$ costruita a lezione è un diffeomorfismo verificando che nella carta oppurtuna è del tipo

$$[z,1] \longmapsto \frac{1}{1+4|z|^2}\left(4\Re z, -4\Im z, 1-4|z|^2\right).$$

Esercizio 1.5. Mostra che l'embedding di Segre $f\colon \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^3$,

$$f\colon [x_0,x_1]\times[y_0,y_1] \longmapsto [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1]$$

è effettivamente un embedding.

Esercizio 1.6. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado d.

Esercizio 1.7. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x,y) = (x+1, y), \qquad g(x,y) = (-x, y+1).$$

Mostra che Γ agisce in modo libero e propriamente discontinuo, e che il quadrato Q di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ è un dominio fondamentale.

Esercizio 1.8. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x,y) = \left(2x, \tfrac{1}{2}y\right).$$

Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \to M/_\Gamma$ è un rivestimento e che $M/_\Gamma$ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a un disco aperto, ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 1.9. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x,y,z) = (x+1,y,z), \qquad g(x,y,z) = (x,y+1,z),$$

$$h(x,y,z) = (-x,-y,z+1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà $\mathbb{R}^3/_\Gamma$ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

Esercizio 1.10. Sia $\Gamma < O(2n+1)$ un gruppo non banale che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su S^{2n}. Mostra che $\Gamma = \{\pm I\}$ e quindi $S^{2n}/_\Gamma \cong \mathbb{RP}^n$.

2. Esercizi del 17 marzo

Esercizio 2.1. Mostra che una immersione iniettiva propria è un embedding.

Esercizio 2.2. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \to N$ è un diffeomorfismo.

Ricordiamo che una matrice $n \times n$ complessa A è *unitaria* se ${}^t\bar{A}A = I$, *hermitiana* se ${}^t\bar{A} = A$ e *antihermitiana* se ${}^t\bar{A} = -A$. Sia $\text{U}(n) \subset \text{GL}(n,\mathbb{C})$ il sottogruppo delle matrici unitarie.

Esercizio 2.3. Mostra che $\text{U}(n)$ è connesso, compatto, che è una sottovarietà di $\text{GL}(n,\mathbb{C})$ e calcolane la dimensione. Identifica il tangente $T_I U(n)$.

Suggerimento. Il Teorema spettrale si applica anche agli elementi di $\text{U}(n)$. Puoi usare questo fatto di algebra lineare. □

Esercizio 2.4. Siano p,q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t &\longmapsto (e^{pit}, e^{qit}) \end{aligned}$$

è una immersione iniettiva e che l'immagine è densa in $S^1 \times S^1$.

Esercizio 2.5. Sia $M \subset N$ una sottovarietà liscia e $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che $S \subset N$ è una sottovarietà liscia.

Esercizio 2.6. Sia M una varietà liscia. Mostra che la mappa diagonale $M \to M \times M$, $x \mapsto (x,x)$ è un embedding.

Esercizio 2.7. Mostra che una sommersione è sempre una mappa aperta. Deduci che se M è compatta allora non esistono sommersioni $M \to \mathbb{R}^k$ per nessun k.

Esercizio 2.8. Sia $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa
$$f([x,y,z]) = \frac{x^2-y^2, xy, xz, yz}{x^2+y^2+z^2}.$$
Mostra che f è un embedding.

Esercizio 2.9. Una sottovarietà $S \subset M$ è un sottoinsieme chiuso $\iff$ l'inclusione $i\colon S \hookrightarrow M$ è una mappa propria.

Esercizio 2.10. Costruisci un embedding esplicito della bottiglia di Klein K in $\mathbb{R}^n$, per qualche n.

3. Esercizi del 24 marzo

Esercizio 3.1. Siano U, V, W spazi vettoriali. Mostra che esiste un isomorfismo canonico tra gli spazi vettoriali
$$\mathrm{Mult}(U,V;W), \qquad \mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W)).$$

Esercizio 3.2. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ e $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ vettori non nulli.

(1) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono indipendenti, allora $\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}'\otimes\mathbf{w}'$ lo sono.
(2) Se inoltre anche $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ sono indipendenti, allora
$$\mathbf{v}\otimes\mathbf{w} + \mathbf{v}'\otimes\mathbf{w}' \in V\otimes W$$
non è un elemento puro.

Esercizio 3.3. Considera l'isomorfismo canonico $V^*\otimes W \cong \mathrm{Hom}(V,W)$. Mostra che tramite questo isomorfismo gli elementi puri sono mandati precisamente negli omomorfismi di rango ≤ 1.

Esercizio 3.4. Sia g un prodotto scalare su V, che induce un prodotto scalare su ciascun spazio tensoriale $\mathcal{T}_h^k(V)$.

(1) Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale per V, allora anche la base indotta da $\mathcal{B}$ per $\mathcal{T}_h^k(V)$ è ortonormale.
(2) Se g è definito positivo su V, anche il prodotto scalare indotto su $\mathcal{T}_h^k(V)$ è definito positivo.

Esercizio 3.5. Nella dimostrazione che $\mathrm{Gr}_k(V)$ è una sottovarietà di $\mathbb{P}\big(\Lambda_k(V)\big)$, dimostra che la mappa F è una immersione nel punto W.

Esercizio 3.6. Mostra che la grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(V)$ è connessa.

Esercizio 3.7. Mostra che se V ha dimensione pari la grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(V)$ è orientable.

Esercizio 3.8. Considera la quadrica $Q \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ data da
$$Q = \big\{[x_1,\ldots,x_{2n}] \in \mathbb{P}^{2n+1} \bigm| x_1^2 - x_2^2 + \ldots + x_{2n+1}^2 - x_{2n+2}^2 = 0\big\}.$$

Mostra che Q è una sottovarietà liscia connessa di $\mathbb{P}^{2n+1}$ e costruisci un rivestimento liscio

$$S^n \times S^n \longrightarrow Q.$$

Calcola $\pi_1(Q)$.

Esercizio 3.9. Sappiamo che ogni elemento $T \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare

$$T = \sum_{1\leq i<j\leq 4} p_{ij} e_i \wedge e_j.$$

(1) Supponiamo che $T = v_1 \wedge v_2$. Dall'identità $(v_1 \wedge v_2) \wedge (v_1 \wedge v_2) = 0$ deduci che le coordinate p_{ij} di $v_1 \wedge v_2$ soddisfano la relazione

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{23}p_{14} = 0.$$

(2) Deduci che $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$ è contenuto in una quadrica di $\mathbb{P}(\Lambda_2(\mathbb{R}^4))$. Usando esercizi precedenti, deduci che coincide con questa quadrica e calcola $\pi_1(\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^4))$.

Esercizio 3.10. La *grassmanniana orientata* $\mathrm{Gr}_k^+(V)$ è l'insieme formato dai k-sottospazi in V dotati di una orientazione. Costruisci su $\mathrm{Gr}_k^+(V)$ una struttura di varietà liscia e connessa in modo che la mappa $\mathrm{Gr}_k^+(V) \to \mathrm{Gr}_k(V)$ che dimentica l'orientazione sia un rivestimento liscio di grado 2. Usando gli esercizi precedenti mostra che $\mathrm{Gr}_2^+(\mathbb{R}^4) \cong S^2 \times S^2$.

4. Esercizi del 31 marzo

Esercizio 4.1. Ricordiamo che $\mathbb{RP}^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in $\mathbb{R}^{n+1}$. Considera l'insieme

$$E = \left\{ (l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; v \in l \right\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \to \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1.

Esercizio 4.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 4.3. Mostra che il fibrato normale di S^n dentro $\mathbb{R}^{n+1}$ è banale.

Esercizio 4.4. Dimostra che esistono esattamente due fibrati vettoriali di rango 1 con base S^1 a meno di isomorfismi.

Esercizio 4.5. Sia M una varietà liscia e TM il suo fibrato tangente. Mostra che esiste sempre un fibrato vettoriale $E \to M$ tale che $TM \oplus E$ sia un fibrato vettoriale banale.

Esercizio 4.6. Costruisci un fibrato $E \to K$ con fibra $F = S^1$ sopra la bottiglia di Klein K, tale che E sia una 3-varietà compatta orientabile (consiglio: puoi usare un esercizio della prima settimana).

Esercizio 4.7. Mostra che qualsiasi varietà non-orientabile M di dimensione n è contenuta in una varietà orientabile di dimensione $n+1$.

Ricordiamo che $\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{U}(n)$ è il sottogruppo formato dalle matrici unitarie A con $\det A = 1$.

Esercizio 4.8. Mostra che $\mathrm{SU}(n)$ è una varietà liscia e calcola la sua dimensione.

Esercizio 4.9. Costruisci un diffeomorfismo tra $\mathrm{SU}(2)$ e S^3.

Esercizio 4.10. Se M è orientabile e N non è orientabile, il prodotto $M \times N$ può essere orientabile? E se entrambe M e N sono non orientabili?

5. Esercizi del 7 aprile

Esercizio 5.1. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] \equiv 0.$$

Esercizio 5.2. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Esercizio 5.3. Costruisci sul toro $T = S^1 \times S^1$ due campi vettoriali X e Y con queste proprietà:

- ciascuna curva integrale di X ha supporto compatto;
- ciascuna curva integrale di Y ha supporto denso in T;
- X e Y commutano.

Esercizio 5.4. Sia X un campo vettoriale su una varietà M. Siano $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ una curva integrale e $p \in M$ un punto tali che $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = p$. Mostra che $X(p) = 0$.

Una varietà M è detta *parallelizzabile* se il fibrato tangente TM ammette un frame, cioè è banale.

Esercizio 5.5. Mostra che se M è parallelizzabile allora M è orientabile.

Esercizio 5.6. Mostra che una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli è sempre parallelizzabile.

Esercizio 5.7. Sia $\tilde{M} \to M$ un rivestimento liscio fra varietà lisce. Mostra che se M è parallelizzabile, anche $\tilde{M}$ è parallelizzabile.

Esercizio 5.8. Sia M una varietà e considera l'*embedding diagonale* $i\colon M \hookrightarrow M \times M$, $p \mapsto (p,p)$. Mostra che il fibrato normale di $i(M)$ dentro $M \times M$ è isomorfo al fibrato tangente di M.

Esercizio 5.9. Costruisci un campo vettoriale mai nullo su ciascun spazio lenticolare $L(p, q)$.

Esercizio 5.10. Mostra sul toro $T = S^1 \times S^1$ esiste un campo vettoriale che contiene contemporaneamente linee integrali con supporto compatto e non compatto.

6. Esercizi del 21 aprile

Esercizio 6.1. Mostra che una distribuzione D di rango 1 (in una varietà M qualsiasi) è sempre integrabile.

Esercizio 6.2. Per ogni $n \geq 3$ costruisci una distribuzione non integrabile di rango $n-1$ in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 6.3. Sia D una distribuzione in M e D' una distribuzione in M'. La distribuzione $D + D'$ in $M \times M'$ è definita nel modo ovvio, ponendo $(D + D')_{(p,p')} = D_p + D'_{p'}$, ricordando che $T_{(p,p')}(M \times M') = T_pM \times T_{p'}M'$. Mostra che se D e D' sono integrabili allora anche $D + D'$ è integrabile.

Esercizio 6.4. Costruisci una foliazione di rango 1 sul toro $S^1 \times S^1$ che contenga contemporaneamente foglie compatte e non compatte.

Esercizio 6.5. Mostra che ciascuno spazio lenticolare $L(p, q)$ ammette una foliazione in cerchi (cioè una foliazione di rango 1 con foglie tutte compatte).

Esercizio 6.6. Considera $S^3 = \big\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\big\}$. Per ogni $p = (z_1, z_2) \in S^3$, prendiamo la retta complessa

$$r_p = \Big\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \;\Big|\; w_1\bar{z}_1 + w_2\bar{z}_2 = 0\Big\}.$$

(1) Mostra che $r_p \subset T_pS^3$. Quindi $\{r_p\}_{p \in S^3}$ è una distribuzione di rango due in S^3, detta *distribuzione di Hopf*.
(2) Questa distribuzione è integrabile?

Esercizio 6.7. Mostra che due embedding $f, g \colon \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ sono sempre isotopi.

Esercizio 6.8. Sia M connessa e orientabile. Sia $N \subset M$ una ipersuperficie connessa e orientabile. Mostra che $M \setminus N$ ha una o due componenti connesse. Descrivi degli esempi in entrambi i casi.

Esercizio 6.9. Sia $\tilde{M} \to M$ un rivestimento liscio. Descrivi un metodo per sollevare qualsiasi foliazione di rango k in M ad una foliazione di rango k in $\tilde{M}$.

Esercizio 6.10. Mostra che $\mathrm{SO}(3)$ e $\mathbb{RP}^3$ sono omeomorfi.

7. Esercizi del 28 aprile

Esercizio 7.1. Sia $f\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ un nodo (cioè un embedding liscio). Mostra che esiste un piano $P \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\pi \circ f\colon S^1 \hookrightarrow P$ sia un'immersione, dove π è la proiezione ortogonale su P.

Esercizio 7.2. Sia $E \to M$ un fibrato. Mostra che una sottovarietà $S \subset E$ è immagine di una sezione $\Longleftrightarrow$ interseca trasversalmente ogni fibra in un punto.

Esercizio 7.3. Sia M varietà orientabile connessa e $\Sigma \subset M$ ipersuperficie orientabile chiusa connessa. Mostra che Σ è non-separante (cioè $M \setminus \Sigma$ è connesso) $\Longleftrightarrow$ esiste una mappa $g\colon S^1 \to M$ trasversa a Σ tale che $g^{-1}(\Sigma)$ sia un punto.

La caratteristica di Eulero di una superficie S_g di genere g è $\chi(S_g) = 2-2g$. Questa può essere presa come una definizione.

Esercizio 7.4. Siano $g, g', d \geq 1$ qualsiasi. Mostra che se $\chi(S_g) = d\chi(S_{g'})$ allora esiste un rivestimento $S_g \to S_{g'}$ di grado d.

Esercizio 7.5. Sia $f\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ un omeomorfismo. Sia $X = D^n \cup_f D^n$ lo spazio topologico ottenuto incollando due copie di D^n tramite il bordo, usando l'omeomorfismo f. Mostra che X è omeomorfo a S^n.

Una proprietà P di una funzione liscia $f\colon M \to N$ è *stabile* se per ogni omotopia $f_t\colon M \to N$, $t \in [0,1]$, con $f_0 = f$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che tutte le funzioni f_t con $t < \varepsilon$ abbiano la proprietà P.

Esercizio 7.6. Sia M compatta e $f\colon M \to N$ una funzione liscia. Mostra che essere una immersione o una sommersione è una proprietà stabile.

Esercizio 7.7. Siano M, W varietà compatte. Siano $f\colon M \to N$ e $g\colon W \to N$ due funzioni lisce. Mostra che la proprietà di essere trasverse è stabile sia per f che per g.

Esercizio 7.8. Siano M e N due varietà connesse senza bordo di dimensione $n \geq 3$. Mostra che

$$\pi_1(M\#N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N)$$

dove $*$ indica il prodotto libero di gruppi (cerca la definizione in rete se non la conosci).

Esercizio 7.9. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato con fibra F connessa. Fissa un punto base qualsiasi $x_0 \in E$. Mostra che $\pi_*\colon \pi_1(E, x_0) \to \pi_1(M, \pi(x_0))$ è un omomorfismo suriettivo. Se si tratta di un fibrato vettoriale, mostra che è un isomorfismo (costruisci un retratto di deformazione di E su M).

Esercizio 7.10. Sia M una varietà connessa e $\Sigma \subset M$ una sottovarietà connessa compatta di codimensione almeno 2. Mostra che $M \setminus \Sigma$ è connessa e l'inclusione $i\colon M \setminus \Sigma \hookrightarrow M$ induce un omomorfismo suriettivo $i_*\colon \pi_1(M \setminus \Sigma) \to \pi_1(M)$.

8. Esercizi del 6 maggio

Esercizio 8.1. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2) e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1. Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Esercizio 8.2. Sia $f\colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

Esercizio 8.3. Sia $f\colon U \to V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y^1, \ldots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

Esercizio 8.4. Se $\varphi\colon M \to N$ è liscia e $\omega \in \Omega^k(N)$, otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. □

Esercizio 8.5. Usa il teorema di Stokes per dimostrare il teorema del rotore:

$$\int_S \mathrm{Rot} X \cdot d\mathbf{n} = \int_{\partial S} X \cdot \mathbf{t}$$

valido per qualsiasi superficie orientata $S \subset \mathbb{R}^3$, campo vettoriale X in $\mathbb{R}^3$ definito su S, campo normale unitario $\mathbf{n}$ a S e campo tangente unitario $\mathbf{t}$ a ∂S, orientati entrambi in modo coerente con l'orientazione di S e di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 8.6. Sia M una n-varietà. Una n-forma ω è una forma di volume per M rispetto ad una qualche orientazione di M se e solo se $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$.

In virtù dell'esercizio precedente, una n-forma mai nulla ω su una n-varietà M è detta semplicemente *forma di volume*. Notiamo che ω determina effettivamente una orientazione per M.

Esercizio 8.7. Mostra che per qualsiasi varietà orientabile M e qualsiasi numero reale positivo $K > 0$ esiste una forma volume ω tale che

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \omega = K.$$

Suggerimento. Mostra prima che esiste ω tale che $\mathrm{Vol}(M) < +\infty$. □

Una forma bilineare antisimmetrica ω su uno spazio vettoriale V è *degenere* se esiste un vettore $v \in V$ non nullo tale che $\omega(v, w) = 0$ per ogni $w \in V$. Una forma bilineare antisimmetrica ω non degenere su V è detta *forma simplettica*.

Esercizio 8.8. Mostra che V ammette una forma simplettica $\iff$ V ha dimensione pari.

Una *struttura simplettica* su una varietà M è una 2-forma ω chiusa e *non degenere*, cioè tale che per ogni $p \in M$ la forma bilineare antisimmetrica $\omega(p)$ sia non degenere.

Esercizio 8.9. Costruisci una struttura simplettica su $\mathbb{R}^{2n}$ e sul toro $2n$-dimensionale $T = \mathbb{R}^{2n}/_{\mathbb{Z}^{2n}}$.

Esercizio 8.10. Mostra che una struttura simplettica su una superficie S è una forma di volume per S, e viceversa. In dimensione arbitraria $2n$, mostra che se ω è una forma simplettica su M^{2n} allora il prodotto wedge

$$\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n} \in \Omega^{2n}(M)$$

è una forma volume.

9. Esercizi del 13 maggio

Esercizio 9.1. Dimostra il Lemma dei 5.

Esercizio 9.2. Mostra che i numeri di Betti del toro $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ sono

$$b^k(T^n) = \binom{n}{k}.$$

Esercizio 9.3. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 9.4. Sia M una n-varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia N ottenuta da M rimuovendo un punto. Otteniamo:

$$b^i(N) = b^i(M) \quad \forall i \leq n-1,$$
$$b^n(N) = b^n(M) - 1.$$

Suggerimento. Usa Mayer – Vietoris con $M = U \cup V$, $U = N$, e V palla aperta contenente il punto rimosso. □

Esercizio 9.5. Sia $M\#N$ la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Otteniamo:

$$b^i(M\#N) = 1 \quad \text{se } i = 0, n,$$
$$b^i(M\#N) = b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n.$$

Puoi usare l'esercizio precedente. Deduci che i numeri di Betti della superficie S_g di genere g sono

$$b^0 = 1, \qquad b^1 = 2g, \qquad b^2 = 1.$$

Esercizio 9.6. Calcola i numeri di Betti della superficie ottenuta togliendo k punti al piano $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 9.7. Dimostra che la superficie $\mathbb{C} \setminus Z$ ha $b^1 = \infty$.

Esercizio 9.8. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale. Mostra che le due varietà E e M sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 9.9. Sia $K \subset S^3$ un nodo. Mostra che $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$.

Esercizio 9.10. Siano M e N due varietà compatte con bordo e $\varphi\colon \partial M \to \partial N$ un diffeomorfismo. Sia W ottenuta incollando M con N via φ. Mostra che

$$\chi(W) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(\partial M).$$

10. Esercizi del 20 maggio

Esercizio 10.1. Scegli un atlante per S^2 e per ciascuna carta scrivi i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita associata alla metrica di S^2 indotta da $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 10.2. Considera lo spazio iperbolico nel modello del semispazio:

$$H^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\big\}, \quad g = \frac{1}{x_n^2} g^E.$$

Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per H^n:

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che $\mathrm{Isom}(H^n)$ agisce transitivamente su H^n.

Esercizio 10.3. Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:

$$H^2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\big\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Mostra che il dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

ha area finita, per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume di H^2.

Esercizio 10.4. Calcola i simboli di Christoffel nel piano iperbolico con il modello del semipiano H^2 descritto nell'esercizio precedente. Mostra che

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}.$$

Esercizio 10.5. Considera ancora H^2. Sia $v_0 = (0, 1)$ punto tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Mostra che v_t fa un angolo t con l'asse delle ordinate. Deduci che γ non è una geodetica. Puoi usare l'esercizio precedente.

Esercizio 10.6. Un *frame* su una varietà riemanniana M è il dato di un punto $p \in M$ e di una base ortonormale $v_1, \ldots, v_n$ per T_pM. Mostra che le isometrie di $\mathbb{R}^n$, S^n e $\mathbb{H}^n$ agiscono transitivamente sui frame. Ricordiamo che a lezione abbiamo scoperto che

- $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \supset \{f(x) = Ax + b \mid A \in \mathrm{O}(n), b \in \mathbb{R}^n\}$,
- $\mathrm{Isom}(S^n) \supset \mathrm{O}(n + 1)$,
- $\mathrm{Isom}(I^n) \supset O^+(n, 1)$.

Esercizio 10.7. Sia $p\colon \tilde{M} \to M$ un rivestimento liscio. Mostra come una struttura riemanniana su M ne induca una su $\tilde{M}$ per cui p è una isometria locale.

Esercizio 10.8. Considera la connessione ∇ su $\mathbb{R}^3$ con simboli di Christoffel

$$\Gamma^3_{12} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = 1$$
$$\Gamma^3_{21} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{13} = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g, ma non è simmetrica.

Esercizio 10.9. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ.

Esercizio 10.10. Sia $\pi\colon E^{n+k} \to M^n$ un fibrato con fibra diffeomorfa a F^k. Supponi che M, E, F siano tutte compatte, orientabili e senza bordo. Mostra che se $s\colon M \to E$ è una sezione, allora il duale di Poincaré di $s(M)$ è un elemento non nullo in $H^k(E)$. Deduci che la fibrazione di Hopf $S^3 \to S^2$ non ha sezioni.

Suggerimento. Usa la relazione fra $\wedge$ e intersezione trasversa (che abbiamo enunciato e non dimostrato). □

11. Esercizi del 27 maggio

Esercizio 11.1. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico (B^n, g), dato da

$$g(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 g^E(x)$$

dove g^E è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh(t/2)v = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}v.$$

Suggerimento. Usa il fatto che g ha una simmetria sferica e quindi $\mathrm{O}(n)$ è un gruppo di isometrie. □

Esercizio 11.2. Usa l'esercizio precedente per dimostrare che la mappa esponenziale $\exp_p\colon T_p\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ è un diffeomorfismo in qualsiasi punto $p \in \mathbb{H}^n$.

Esercizio 11.3. Sia $f\colon M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane. Mostra che se M è completa, allora f è un rivestimento.

Esercizio 11.4. Sia $f\colon M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane che è anche un rivestimento. Mostra che M è completa $\Longleftrightarrow$ N è completa.

Esercizio 11.5. Sia M una n-varietà riemanniana. Mostra che per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto U di p e n campi vettoriali $X_1, \ldots, X_n$ in U tali che $X_1(q), \ldots, X_n(q)$ sia una base ortonormale di $T_q(U)$ per ogni $q \in U$.

Esercizio 11.6. Dati n campi vettoriali come nell'esercizio precedente, è sempre possibile trovare una carta $\varphi\colon U \to V$ che trasporti questi campi nei campi coordinati $e_1, \ldots, e_n$?

Esercizio 11.7. Una varietà riemanniana è *omogenea* se per ogni $p, q \in M$ esiste una isometria di M che porti p in q. Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

Esercizio 11.8. Una varietà riemanniana è *isotropa* in $p \in M$ se per ogni coppia di vettori $v, w \in T_pM$ di norma unitaria esiste una isometria f di M tale che $f(p) = p$ e $df_p(v) = w$. Mostra che una varietà riemanniana completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

Esercizio 11.9. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del semipiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le trasformazioni

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ sono isometrie di H^2.

Esercizio 11.10. Considera il modello dell'iperboloide $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ dello spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$. Mostra che per ogni $p, q \in I^n$ abbiamo

$$\cosh d(p,q) = -\langle p, q \rangle.$$