

# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 1 - 16/3/2011

## 1 Un po' di riscaldamento

Utilizzando il comando `plot` tracciamo il grafico della funzione  $f(x) = \sin(x) + x \cos^2(x)$  nell'intervallo  $[0, 2]$ :

```
octave:1> x=[0:0.01:2];  
octave:2> y=sin(x)+x.*cos(x).^2;  
octave:3> plot(x,y)
```

*Esercizio 1.* Tracciare il grafico della funzione  $f(x) = 1/(x-1)^2 + 3/(x-2)^2$  nell'intervallo  $[0, 3]$  (attenzione alle singolarità! Utilizzare il comando `hold on`, e ricordarsi di dare i comandi `hold off`, `close all` al termine dell'esercizio)

*Esercizio 2.* Si definisca una function `epicicloide(T,a,b)` che disegni l'epicicloide:

$$\begin{aligned}x(t) &= (a+b)\cos(t) - b\cos((a/b+1)t) \\y(t) &= (a+b)\sin(t) - b\sin((a/b+1)t), \quad 0 \leq t \leq T\end{aligned}$$

Si provi a scegliere  $a = 12$ ;  $b = 5$ ;  $T=10\pi$ . Si provi con altri valori dei parametri.

## 2 Numeri complessi

Le variabili `i`, `j`, `I`, `J` sono speciali, in quanto rappresentano l'unità immaginaria:

```
octave:4> i  
ans = 0 + 1i  
octave:5> j  
ans = 0 + 1i  
octave:6> I  
ans = 0 + 1i  
octave:7> J  
ans = 0 + 1i  
octave:8> sqrt(-1)  
ans = 0 + 1i
```

Fare giochetti con le funzioni `abs`, `angle`, `imag`, `conj`, `real`. Ad esempio si verifichi sperimentalmente che  $|x| = (x\bar{x})^{1/2}$ :

```

octave:9> x=2+4i
x = 2 + 4i
octave:10> y=conj(x)
y = 2 - 4i
octave:11> sqrt(x*y)
ans = 4.4721
octave:12> abs(x)
ans = 4.4721
octave:13> abs(y)
ans = 4.4721

```

Oppure che  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ :

```

octave:14> theta=10;
octave:15> x=cos(theta)+i*sin(theta)
x = -0.83907 - 0.54402i
octave:16> y=exp(i*theta)
y = -0.83907 - 0.54402i
octave:17> x-y
ans = 0

```

Data la rappresentazione cartesiana  $x = a + ib$ , possiamo trovare la rappresentazione polare  $x = re^{i\theta}$  mediante le funzioni `abs` e `angle`:

```

octave:18> x=-3+2*i
x = -3 + 2i
octave:19> r=abs(x)
r = 3.6056
octave:20> theta=angle(x)
theta = 2.5536
octave:21> y=r*exp(i*theta)
y = -3 + 2i

```

Per disegnare il numero complesso  $x$  sul piano complesso, è sufficiente fare

```

octave:22> plot(real(x), imag(x), 'o')

```

Utilizzando gli array, si possono disegnare “tanti” punti sul piano complesso, ad esempio:

```

octave:23> t=[0:0.01:2];
octave:24> x=[t.^2];
octave:25> y=[2*t-1];
octave:26> z=x+i*y;
octave:27> plot(z, 'o')

```

*Esercizio 3.* Scrivere una function `cerchio(R)` che disegni la circonferenza di centro 0 e raggio  $R$  (utilizzare il comando `axis('equal')` per fare in modo che la scala orizzontale sia la stessa che la scala verticale). Scrivere poi una function `cerchio1(c,R)` che disegni la circonferenza di centro  $c$  e raggio  $R$

Se conosciamo un numero complesso espresso mediante le sue coordinate polari, ad esempio  $x = 10e^{2i}$ , possiamo disegnarlo utilizzando il comando `polar` (si dia il comando `help polar` per conoscerne il funzionamento):

```

octave:28> polar(2,10, '*')

```

*Esercizio 4.* Utilizzando il comando `polar` si disegnino sul piano complesso i punti  $\sin(2t) \cos(2t)e^{it}$ , per  $t \in [0, 2\pi]$ .

### 3 Rotazioni e traslazioni sul piano complesso

Un trapezio può essere rappresentato mediante l'aritmetica complessa:

```
octave:28> z=[0 1 1+2i 3i 0] # osservare un vertice ripetuto!  
z =  
  
0 + 0i 1 + 0i 1 + 2i 0 + 3i 0 + 0i  
octave:29> plot(real(z),imag(z),'-')  
octave:30> axis([-1 2 -1 4], "equal")
```

Se  $z$  è un numero complesso, la traslazione di  $w$  si esegue facilmente con l'aritmetica complessa, eseguendo l'operazione  $y = z + w$ . La traslazione della quantità  $w = 0.5 + i$  si ottiene così:

```
octave:31> w=0.5+i;  
octave:32> y=z+w;  
octave:33> hold on  
octave:34> plot(real(y),imag(y),'g-')
```

Anche le rotazioni si rappresentano facilmente con l'aritmetica complessa: se  $z$  è un numero complesso, la rotazione di un angolo  $\theta$  si ottiene moltiplicando  $z$  per  $e^{i\theta}$ . Con questa osservazione ruotiamo la figura originale di  $\pi/6$  radianti:

```
octave:35> mu=mean(z(1:end-1)) # calcola la media delle coordinate dei vertici  
mu = 0.50000 + 1.25000i  
octave:36> theta=pi/6;  
octave:37> omega=exp(i*theta);  
octave:38> y=omega*(z-mu)+mu; # trasla la figura per mettere il centro  
# nell'origine, esegue la rotazione, e di nuovo trasla  
octave:39> plot(real(y),imag(y),'b-')
```

### 4 Giochetti con la FFT

La funzione `fft` calcola la trasformata discreta di Fourier (si veda l'help), ad esempio:

```
octave:21> X=fft(eye(4))  
X =  
  
1 + 0i 1 + 0i 1 + 0i 1 + 0i  
1 + 0i 0 - 1i -1 + 0i 0 + 1i  
1 + 0i -1 + 0i 1 + 0i -1 + 0i  
1 - 0i 0 + 1i -1 - 0i 0 - 1i
```

*Esercizio 5.* Verificare sperimentalmente che la seconda colonna della matrice  $X=\text{fft}(\text{eye}(n))$  ha elementi  $\omega_n^{k-1}$ , per  $k = 1, \dots, n - 1$ , dove  $\omega_n = e^{-2\pi i/n}$ .

*Esercizio 6.* Fissato  $n$ , calcolare  $X=\text{fft}(\text{eye}(n))$  e, utilizzando il comando `plot` disegnare le  $n$  curve a tratti che si ottengono collegando i numeri complessi sulla  $i$ -esima colonna di  $X$ , per  $i=1, \dots, n$ . Provare con  $n=4$ , poi  $n=17$ . Che figura si ottiene?

## 5 T-Puzzle

*(Se avete finito tutto il resto).* Avete mai sentito parlare di “T-puzzle”? È un popolare puzzle che consiste nel formare la lettera T mediante l'accostamento di quattro figure geometriche, costituite da 2 trapezi, un triangolo e un pentagono irregolare. Provate a cercare con Google “T-puzzle” per avere maggiori dettagli. I singoli pezzi possono essere rappresentati con l'aritmetica complessa, e le singole mosse mediante rotazioni e traslazioni sul piano complesso. Provate a costruire il vostro T-puzzle elettronico, definendo i vettori che rappresentano le figure geometriche e dando la soluzione, espressa mediante rotazioni e traslazioni.