Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 10 - 16/5/2012

1 Problemi ai valori iniziali

Ci poniamo il problema di calcolare la soluzione $x(t)$ (assumendo che esista e sia unica) del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t), \quad t \in [a, b] \\ x(a) = c \end{cases}$$

dove $f(x, t) : R^m \times R \to R^m$ è una funzione assegnata e c è un vettore di dimensione m assegnato.

La funzione `lsode` approssima la soluzione $x(t)$ in un numero finito di punti dell'intervallo $[a, b]$. L'utilizzo più semplice procede secondo i seguenti passi (si veda anche l'help):

1. Definire una function `z=miaf(x,t)` che calcola $z = f(x, t)$, dove $f(x, t)$ è la funzione che definisce l'equazione differenziale $x'(t) = f(x(t), t)$

2. Definire un vettore `T` che contiene una discretizzazione dell'intervallo $[a, b]$, ad esempio `T=linspace(a,b,50)`.

3. Definire un vettore `c` che contiene $x(a)$.

4. Eseguire il comando `x = lsode ( ‘‘miaf’’, c, T )`. In output la variabile `x` contiene l'approssimazione della soluzione $x(t)$ calcolata negli elementi del vettore `T`.

Per esempio, per risolvere il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ x_2'(t) = -x_1(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

definisco la `function`

```
function z=esempio(x,t)
  z = [ x(2); -x(1)];
endfunction
```

ed eseguo i comandi

```
octave:2> T=linspace(0,2*pi,50);
octave:3> c=[ 1; 0];
octave:4> x=lsode("esempio",c,T);
```

La variabile x, di dimensione 50×2, contiene nella prima colonna le approssimazioni di $x_1(t)$ e nella seconda colonna le approssimazioni di $x_2(t)$.

La soluzione del problema è $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2(t) = -\sin(t)$. Questo si può verificare:

```
octave:12> err=max(abs((x-[cos(T)',-sin(T)'])))
err =

   1.1088e-06   8.6331e-07
```

Per visualizzare la soluzione si possono dare i comandi

```
octave:13> plot(x(:,1),x(:,2))
octave:14> axis("square")
```

e

```
octave:15> plot(T,x(:,1),T,x(:,2))
```

Esercizio 1. Si risolva il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^3(t), \quad t \in [0,8] \\ x_2'(t) = -x_1^3(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Si disegni il grafico di $x_1(t)$, di $x_2(t)$ e la curva $(x_1(t), x_2(t))$. Si facciano le stesse cose per il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^5(t), \quad t \in [0,8] \\ x_2'(t) = -x_1^5(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Cosa succede per l'equazione $x_1'(t) = x_2^2(t)$, $x_2'(t) = -x_1^2(t)$?

Esercizio 2 (Attrattore di Lorenz). Si risolva il seguente problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = 10(x_2(t) - x_1(t)) \\ x_2'(t) = 28x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \quad t \in [0,50] \\ x_3'(t) = x_1(t)x_2(t) - 8x_3(t)/3 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$$

suddividendo l'intervallo $[0, 50]$ in 500 punti. Si disegni la curva $(x_1(t), x_3(t))$, $t \in [0, 50]$.

Si provi a suddividere l'intervallo in 1000 punti. Come cambia la soluzione?

Quando l'equazione differenziale ha ordine superiore al primo, occorre trasformarla in una di ordine 1.

Esercizio 3. L'equazione del pendolo semplice ha la forma

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0$$

dove $\theta(t)$ è l'angolo formato dall'asta del pendolo con la verticale.

1. Si riscriva l'equazione del pendolo in una equazione del tipo $x'(t) = f(x(t), t)$, dove $f(x,t) : R^2 \times R \to R^2$.

2. Si approssimi la soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0, & t \in [0, 10] \\ \theta(0) = 1 \\ \theta'(0) = 1 \end{cases}$$

   mediante la funzione `lsode`, e si disegni il grafico di $\theta(t)$; si modifichino a piacere le condizioni iniziali e l'intervallo.

3. Nel caso di moto smorzato del pendolo, l'equazione diventa

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) + s\theta'(t) = 0$$

   dove s è una costante positiva che dipende dalle caratteristiche del pendolo e dalla forza smorzante. Si risolva il problema ai valori iniziali, assegnando un valore a s e alle condizioni iniziali, e si disegni il grafico di $\theta(t)$.