Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 7 - 8/5/2013

1 Introduzione a interpolazione e fitting di dati

Supponiamo di avere un insieme di punti x_i, $i = 0, \dots, n$, con $x_i < x_{i+1}$, in un intervallo $[a, b]$ della retta reale, e di conoscere il valore $y_i = f(x_i)$ che una funzione assume in questi punti. Vogliamo calcolare una approssimazione del valore della funzione $f(x)$ in altri punti dell'intervallo $[a, b]$, supponendo di non conoscere $f(x)$, ma utilizzando solamente i valori $f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Per fare questo utilizziamo l'interpolazione o il fitting di dati.

2 Interpolazione

La strategia di interpolazione più semplice è tracciare un segmento che collega due valori consecutivi della funzione; questa viene chiamata interpolazione lineare.

Ad esempio, supponiamo di avere la funzione $f(x) = 1/(1+x^2)$ e di conoscere la funzione nei punti $x_i = 5\cos(i/\pi)$, per $i = 0, \dots, 11$. Disegnamo il valore della funzione in questi punti:

```
octave:8> n=11;
octave:9> z=linspace(0, pi, n);
octave:10> x = 5 * cos(z);
octave:11> f = @(t) 1./(1+t.^2);
octave:12> y = feval(f, x);
octave:13> plot (x, y, 'o')
```

Vogliamo trovare una approssimazione della funzione in 100 punti equispaziati dell'intervallo $[-5, 5]$, usando l'interpolazione lineare. Per questo possiamo usare la function `interp1`:

```
octave:14> m = 100;
octave:15> interpx=linspace(-5, 5, m);
octave:16> interpy= interp1(x, y, interpx, 'linear');
octave:17> hold on
octave:18> plot( interpx, interpy, 'r')
octave:19> legend('punti esatti', 'linear')
```

Si osservano i segmenti che collegano i punti assegnati, che è ciò che fa esattamente l'interpolazione lineare.

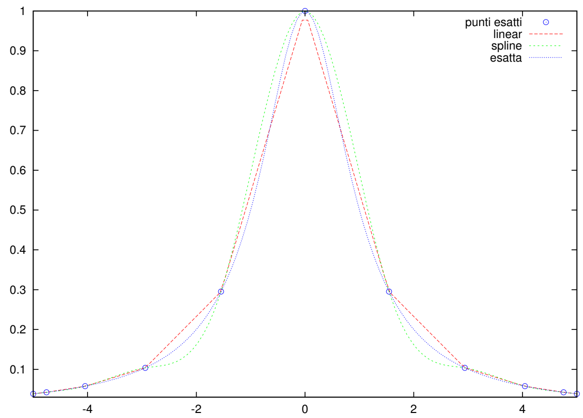
Possiamo fare una interpolazione “spline”, che consiste nel costruire una funzione appossimante polinomiale a tratti, con polinomi di grado al più 3. Questo si ottiene con questi comandi:

```
octave:23> interpysp= interp1(x, y, interpx, 'spline');
octave:24> plot( interpx, interpysp, 'g')
octave:25> legend('punti noti', 'linear', 'spline')
```

Per visualizzare il valore esatto della funzione diamo i comandi:

```
octave:26> yesatta=feval(f, interpx);
octave:27> plot( interpx, yesatta, 'b')
octave:28> legend('punti noti', 'linear', 'spline', 'esatta')
```

Dovreste ottenere l'immagine



Esercizio 1. Tracciare, in scala semilogaritmica, l'errore di approssimazione per le due interpolazioni, cioè il modulo della differenza tra il valore esatto della funzione e quello ottenuto mediante l'interpolazione nei punti equispaziati dell'intervallo $[-5, 5]$.

Provare con gli altri tipi di interpolazione, ad esempio cubica, con i polinomi di Hermite,... (si veda l'help di `interp1`).

Esercizio 2. Costruire la function `p=lagrange(x,y)` che, dati i vettori `x` e `y` di lunghezza n, restituisce in output il vettore che definisce il polinomio $p(x)$ di grado al più $n-1$ che interpola i punti `(x(i), y(i))`, $i = 1, \ldots, n$, costruito mediante i polinomi di Lagrange. Per costruire il generico polinomio di Lagrange si può utilizzare l'istruzione `conv`.

Esercizio 3. Utilizzare la function dell'Esercizio 2 per costruire il polinomio di grado al più 11 che interpola la funzione $f(x) = 1/(1 + x^2)$ nei punti $x_i = 5\cos(i/\pi)$, per $i = 0, \ldots, 11$.

Tracciando un grafico in scala semilogaritmica, confrontare l'errore di approssimazione con quello ottenuto con `interp1` mediante l'interpolazione lineare e spline.

3 Fitting di dati

Assegnati i vettori `x` e `y` di dimensione `m`, e l'intero positivo `n`, l'istruzione `p=polyfit(x,y,n)` calcola i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado al più `n` tale che $p($`x(i)`$)\approx$`y(i)`, per `i=1,...,m`, nel senso dei minimi quadrati. Cioè

$p(x)$ è il polinomio che minimizza la norma 2 della differenza tra il valore del polinomio e valore che voglio interpolare:

$$(p(\texttt{x(1)}) - \texttt{y(1)})^2 + (p(\texttt{x(2)}) - \texttt{y(2)})^2 + ... + (p(\texttt{x(m)}) - \texttt{y(m)})^2.$$

Solitamente il grado n del polinomio è scelto molto più basso del numero m dei punti che conosco.

Il valore del polinomio in un generico punto può essere poi calcolato con l'istruzione `polyval`.

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x) = 1/(x + (1 - x)^2)$ sull'intervallo $[-2, 2]$. Si valuti la funzione $f(x)$ in 20 punti equispaziati x_i, $i = 1, \ldots, 20$, dell'intervallo $[-2, 2]$ e si calcolino i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado 3 tale che $p(x_i) \approx f(x_i)$, nel senso dei minimi quadrati. Si tracci il grafico della funzione $f(x)$ e del polinomio $p(x)$. Provare ad aumentare il grado del polinomio.

Esercizio 5. Per la funzione dell'esercizio precedente, disegnare il grafico degli errori in scala semilogaritmica dell'approssimazione ottenuta con `polyfit` con $n = 5$, di quella che ottengo utilizzando gli stessi punti x_i con `interp1` lineare e spline, e del polinomio ottenuto con la vostra function dell'Esercizio 2.

4 Esercizi da inviare al docente

Inviare per e-mail, con subject "LDMC: cognome/nome":

1. La function scritta per svolgere l'esercizio 2.

2. Il massimo modulo degli errori ottenuti per ciascun metodo nell'Esercizio 5.