

# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 7 - 16/4/2014

## 1 Introduzione a interpolazione e fitting di dati

Supponiamo di avere un insieme di punti  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , con  $x_i < x_{i+1}$ , in un intervallo  $[a, b]$  della retta reale, e di conoscere il valore  $y_i = f(x_i)$  che una funzione assume in questi punti. Vogliamo calcolare una approssimazione del valore della funzione  $f(x)$  in altri punti dell'intervallo  $[a, b]$ , supponendo di non conoscere  $f(x)$ , ma utilizzando solamente i valori  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Per fare questo utilizziamo l'interpolazione o il fitting di dati.

## 2 Interpolazione

La strategia di interpolazione più semplice è tracciare un segmento che collega due valori consecutivi della funzione; questa viene chiamata interpolazione lineare.

Ad esempio, supponiamo di avere la funzione  $f(x) = 1/(1+x^2)$  e di conoscere la funzione nei punti  $x_i = 5 \cos(i/\pi)$ , per  $i = 0, \dots, 11$ . Disegniamo il valore della funzione in questi punti:

```
octave:8> n=11;
octave:9> z=linspace(0, pi, n);
octave:10> x = 5 * cos(z);
octave:11> f = @(t) 1./(1+t.^2);
octave:12> y = feval(f, x);
octave:13> plot(x, y, 'o')
```

Vogliamo trovare una approssimazione della funzione in 100 punti equispaziati dell'intervallo  $[-5, 5]$ , usando l'interpolazione lineare. Per questo possiamo usare la function `interp1`:

```
octave:14> m = 100;
octave:15> interpx=linspace(-5, 5, m);
octave:16> interpy= interp1(x, y, interpx, 'linear');
octave:17> hold on
octave:18> plot(interpx, interpy, 'r')
octave:19> legend('punti esatti', 'linear')
```

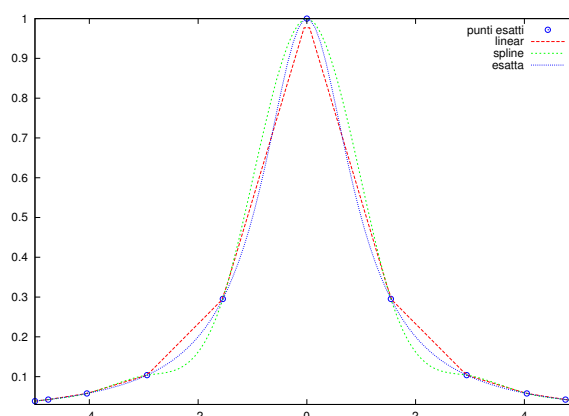
Si osservano i segmenti che collegano i punti assegnati, che è ciò che fa esattamente l'interpolazione lineare.

Possiamo fare una interpolazione “spline”, che consiste nel costruire una funzione approssimante polinomiale a tratti, con polinomi di grado al più 3. Questo si ottiene con questi comandi:

```
octave:23> interpysp= interp1(x, y, interpx, 'spline');
octave:24> plot( interpx, interpysp, 'g')
octave:25> legend( 'punti noti', 'linear', 'spline')
```

Per visualizzare il valore esatto della funzione diamo i comandi:

```
octave:26> yesatta=feval(f, interpx);
octave:27> plot( interpx, yesatta, 'b')
octave:28> legend( 'punti noti', 'linear', 'spline', 'esatta')
```



Dovreste ottenere l'immagine

*Esercizio 1.* Tracciare, in scala semilogaritmica, l'errore di approssimazione per le due interpolazioni, cioè il modulo della differenza tra il valore esatto della funzione e quello ottenuto mediante l'interpolazione nei punti equispaziati dell'intervallo  $[-5, 5]$ .

Provare con gli altri tipi di interpolazione, ad esempio cubica, con i polinomi di Hermite, ... (si veda l'help di `interp1`).

*Esercizio 2.* Costruire la function `p=lagrange(x,y)` che, dati i vettori `x` e `y` di lunghezza `n`, restituisce in output il vettore che definisce il polinomio  $p(x)$  di grado al più  $n - 1$  che interpola i punti  $(x(i), y(i))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , costruito mediante i polinomi di Lagrange. Per costruire il generico polinomio di Lagrange si può utilizzare l'istruzione `conv` oppure l'istruzione `poly`.

*Esercizio 3.* Utilizzare la function dell'Esercizio 2 per costruire il polinomio di grado al più 11 che interpola la funzione  $f(x) = 1/(1 + x^2)$  nei punti  $x_i = 5 \cos(i/\pi)$ , per  $i = 0, \dots, 11$ .

Tracciando un grafico in scala semilogaritmica, confrontare l'errore di approssimazione con quello ottenuto con `interp1` mediante l'interpolazione lineare e spline.

### 3 Fitting di dati

Assegnati i vettori `x` e `y` di dimensione `m`, e l'intero positivo `n`, l'istruzione `p=polyfit(x,y,n)` calcola i coefficienti del polinomio  $p(x)$  di grado al più `n` tale che  $p(x(i)) \approx y(i)$ , per  $i=1, \dots, m$ , nel senso dei minimi quadrati. Cioè

$p(x)$  è il polinomio che minimizza la norma 2 della differenza tra il valore del polinomio e valore che voglio interpolare:

$$(p(x(1)) - y(1))^2 + (p(x(2)) - y(2))^2 + \dots + (p(x(m)) - y(m))^2.$$

Solitamente il grado  $n$  del polinomio è scelto molto più basso del numero  $m$  dei punti che conosco.

Il valore del polinomio in un generico punto può essere poi calcolato con l'istruzione `polyval`.

*Esercizio 4.* Si consideri la funzione  $f(x) = 1/(x + (1 - x)^2)$  sull'intervallo  $[-2, 2]$ . Si valuti la funzione  $f(x)$  in 20 punti equispaziati  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 20$ , dell'intervallo  $[-2, 2]$  e si calcolino i coefficienti del polinomio  $p(x)$  di grado 3 tale che  $p(x_i) \approx f(x_i)$ , nel senso dei minimi quadrati. Si tracci il grafico della funzione  $f(x)$  e del polinomio  $p(x)$ . Provare ad aumentare il grado del polinomio.

*Esercizio 5.* Per la funzione dell'esercizio precedente, disegnare il grafico degli errori in scala semilogaritmica dell'approssimazione ottenuta con `polyfit` con  $n = 5$ , di quella che ottengo utilizzando gli stessi punti  $x_i$  con `interp1` lineare e spline, e del polinomio ottenuto con la vostra function dell'Esercizio 2.

## 4 Esercizi da inviare al docente

Inviare per e-mail, con subject "LDMC: lezione 7, cognome nome":

1. La function scritta per svolgere l'esercizio 2.
2. Il massimo modulo degli errori ottenuti per ciascun metodo nell'Esercizio 5.