Introduzione alla teoria delle equazioni differenziali

Matteo Novaga

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/04

1 Spazi vettoriali topologici.

Richiamiamo le definizioni ed i risultati fondamentali della teoria degli spazi vettoriali topologici (in breve s.v.t.). Diciamo che (X, τ) è uno *spazio vettoriale topologico* se X è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) munito di una topologia τ tale che

1. (X, τ) è uno spazio di Hausdorff,

2. le operazioni di somma e prodotto per scalare sono continue.

Le spazio X si dice *localmente convesso* se esiste una base di intorni di 0, per la topologia τ, che siano convessi (ricordiamo che un intorno di 0 se $0 \in V \in \tau$).
Un sottoinsieme E di uno s.v.t. X si dice *limitato* se per ogni intorno V di 0 esiste $s > 0$ tale che $E \subset tV$ per ogni $t > s$. X si dice *localmente limitato* se esiste un intorno di 0 limitato. Osserviamo che in uno s.v.t. i punti sono sempre sottoinsiemi limitati.
Un sottoinsieme E di uno s.v.t. X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di E ammette un sottoricoprimento finito, si ha che ogni sottoinsieme compatto di X è anche limitato.
Una funzione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ si dice una *norma* su X se

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in X$,

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,

3. $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$.

Una norma induce naturalmente una distanza su X, ponendo $d(x, y) = \|x - y\|$. In particolare uno spazio normato è uno s.v.t. localmente convesso e localmente limitato, e la sua topologia è generata dalle palle $B_r(x) := \{\|x\| < r\}$. Più in generale, si ha che uno s.v.t. è normabile, cioè ammette una norma che induce la topologia τ, se e solo se ammette un intorno di 0 convesso e limitato. Osserviamo che in uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ un insieme $E \subset X$ è limitato se e solo se $\sup_{x \in E} \|x\| < +\infty$.
Dato uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$, se la metrica d corrispondente è completa (cioè ogni successione di Cauchy per d converge in X), si dice che $(X, \|\cdot\|)$ è uno *spazio di Banach*. Uno spazio di Banach è quindi uno s.v.t. normato e completo.
Esempio 1: gli spazi $L^p(\Omega)$, con $p \geq 1$ e Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ o $\mathbb{C}^N$, sono spazi di Banach muniti della corrispondente norma $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}$.
Uno s.v.t. (X, τ) si dice *metrizzabile* se esiste una distanza d su X che genera la topologia τ, tale distanza si dice *invariante* se $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.
Uno s.v.t. localmente convesso (X, τ) si dice *spazio di Fréchet* se ammette una metrica invariante e completa che induce la topologia τ, in particolare ogni spazio di Banach è anche uno spazio di Fréchet.
Esempio 2: gli spazi $C^k(\Omega)$, con $k \in [0, \ldots, \infty]$, muniti della topologia della convergenza uniforme sui compatti, sono spazi di Fréchet ma non di Banach, in effetti non sono localmente limitati e quindi non sono normabili.
Sia X uno spazio vettoriale, una funzione $p : X \to \mathbb{R}^+$ si dice una *seminorma* su X se

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, per ogni $x, y \in X$,

2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Si osservi che si può avere $p(x) = 0$ per $x \neq 0$ (da cui il termine seminorma).
Una famiglia di seminorme $\mathcal{P}$ si dice *separatrice* se per ogni $x \neq 0$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$. Ad una famiglia separatrice $\mathcal{P}$ di seminorme si può associare una topologia τ, che rende (X, τ) uno s.v.t. localmente convesso, per cui una base di intorni di 0 è data dalle intersezioni finite di insiemi del tipo $V(p, n) := \{x \in X : \ p(x) < 1/n\}$.
Se uno spazio vettoriale ammette una famiglia numerabile e separatrice di seminorme, allora ammette una metrica invariante (non necessariamente completa) compatibile con la topologia τ data da

$$d(x, y) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i(x-y)}{2^i(1 + p_i(x-y))}, \qquad x, y \in X.$$

Esempio 3: $C(\Omega)$ ammette una famiglia numerabile e separatrice di seminorme data da

$$p_n(f) := \sup_{K_n} |f|,$$

dove $K_n \subset K_{n+1}$ è una successione di compatti tali che $\bigcup_n K_n = \Omega$ (diremo che la successione K_n invade Ω).
Esempio 4: $C^\infty(\Omega)$ ammette una famiglia numerabile e separatrice di seminorme data da

$$p_n(f) := \sup_{\substack{K_n \\ |\alpha| \leq n}} |D^\alpha f|,$$

dove la successione K_n è definita come sopra.

1.1 Il teorema di Baire e applicazioni.

Dato uno spazio topologico (X, τ) ed un insieme $E \subseteq X$ diremo che E è *denso* in X se $\overline{E} = X$, mentre E è *mai denso* in X se $\text{int}(\overline{E}) = \emptyset$. Un insieme $G \subseteq X$ si dice di *prima categoria* se G è unione numerabile di insiemi E_i mai densi in X. G si dice di *seconda categoria* se non è di prima categoria. Enunciamo il seguente fondamentale risultato di Baire.

Teorema 1.1 (Baire). *Uno spazio metrico completo (X, d) è sempre di seconda categoria, o equivalentemente l'intersezione numerabile di aperti densi di X è densa in X.*

Dimostrazione. Siano $V_1, V_2, \ldots$ una successione di aperti densi e sia $B_1 := B_r(y_1) = \{x : d(x, y_1) < r\}$ per un fissato $y \in X$ e $r > 0$. Poiché gli insiemi V_n sono densi, possiamo scegliere una successione di palle $B_n := \{x : d(x, y_n) < r/n\}$, $y_n \in X$, tale che

$$\overline{B_n} \subset V_n \cap B_{n-1}.$$

Detto $K := \bigcap_n \overline{B_n}$, si ha $K \neq \emptyset$, poiché la successione y_n è di Cauchy ed il suo limite sta in K. Per costruzione $K \subset B_1$ e $K \subset V_n$ per ogni n, pertanto $B_r(y_1)$ interseca $\bigcap_n V_n$ per ogni y_1 ed r, cioè $\bigcap_n V_n$ è un insieme denso. $\square$

Richiamiamo senza dimostrazione il seguente teorema di Banach-Steinhaus, detto anche *principio di uniforme limitatezza.* Data una famiglia Γ di applicazioni lineari da X a Y, diremo che Γ è *equicontinua* se per ogni intorno $W \subset Y$ di 0 esiste un intorno $V \subset X$ di 0 tale che $\Lambda(V) \subset W$ per ogni $\Lambda \in \Gamma$.

Teorema 1.2 (Banach–Steinhaus). *Siano X, Y due s.v.t. e sia Γ una famiglia di applicazioni lineari e continue da X in Y. Sia B l'insieme degli $x \in X$ per cui l'orbita di x secondo Γ, definita come $\bigcup_{\Lambda\in\Gamma} \Lambda x$, è limitata in Y. Allora, se B è di seconda categoria in X si ha $B = X$ e Γ è una famiglia equicontinua.*

Osservazione 1.3. *Se X e Y sono spazi di Banach e Γ è come sopra, il teorema 1.2 diventa*

$$\sup_{\Lambda\in\Gamma} \|\Lambda x\|_Y < +\infty \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \|\Lambda x\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

per qualche costante $c > 0$ che non dipende da Λ.

Corollario 1.4. *Sia X uno spazio di Fréchet, Y uno s.v.t. e $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di applicazioni lineari continue da X in Y tali che per ogni $x \in X$ esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n x = \Lambda x.$$

Allora Λ è un'applicazione lineare continua.

Dati due s.v.t. X, Y, un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *aperta* se $f(U) \subseteq Y$ è un insieme aperto per ogni aperto $U \subseteq X$. Se f è lineare allora f è aperta se e solo se è aperta nell'origine, cioè se $f(V)$ è un intorno di 0 in Y ogni volta che V è un intorno di 0 in X.

Teorema 1.5 (mappa aperta). *Siano X, Y spazi di Fréchet e sia $\Lambda : X \to Y$ un'applicazione lineare, continua e surgettiva. Allora Λ è aperta; in particolare se Λ è iniettiva allora Λ^{-1} è continua.*

Data un'applicazione f tra due spazi topologici X, Y definiamo il grafico $\Gamma_f \subset X \times Y$ di f come l'insieme

$$\Gamma_f := \Big\{(x, f(x)) \in X \times Y : \; x \in X\Big\},$$

dove lo spazio topologico $X \times Y$ si intende munito della topologia prodotto. Osserviamo che se f è continua e Y è uno spazio di Hausdorff, allora Γ_f è un insieme chiuso. Infatti detto $\Omega := (X \times Y) \setminus \Gamma_f$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$, poiché Y è di Hausdorff, y_0 e $f(x_0)$ hanno intorni disgiunti $V, W \subset Y$. Poiché f è continua, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset W$, quindi $U \times V \subset \Omega$, cioè Ω è aperto.
Il seguente risultato mostra che, in alcuni casi, è vero anche il viceversa.

Teorema 1.6 (grafico chiuso). *Siano X, Y spazi di Fréchet e sia $\Lambda : X \to Y$ un'applicazione lineare tale che il grafico Γ_Λ è chiuso in $X \times Y$. Allora Λ è continua.*

1.2 Convessità e teoremi di Hahn–Banach.

Teorema 1.7 (Hahn–Banach, forma analitica). *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, M un suo sottospazio e $p : X \to \mathbb{R}$ tale che*

a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$;

b) $p(tx) = tp(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $t > 0$.

Allora, per ogni applicazione lineare $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $f \leq p$ su M, esiste un'applicazione lineare $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ tale che $\Lambda \leq p$ su X e $\Lambda \equiv f$ su M.

Corollario 1.8. *Sia X uno spazio vettoriale, M un suo sottospazio, p una seminorma su X e f un funzionale lineare su M tale che $f \leq p$ su M. Allora, esiste un funzionale lineare Λ su X tale che $\Lambda \leq p$ su X e $\Lambda \equiv f$ su M.*

Sia X uno s.v.t. definiamo il suo duale (topologico) X^* come lo spazio vettoriale formato dai funzionali lineari e continui su X (a valori nel campo corrispondente).

Corollario 1.9. *Sia X uno s.v.t. normato e $x_0 \in X$, allora esiste $\Lambda \in X^*$ tale che $\Lambda x_0 = \|x_0\|$ e $\Lambda x \leq \|x\|$ per ogni $x \in X$.*

Teorema 1.10 (Hahn-Banach, forma geometrica). *Sia X uno s.v.t. localmente convesso e siano A, B due sottoinsiemi convessi, disgiunti e non vuoti di X. Allora*

a) se A è aperto, esistono $\Lambda \in X^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathrm{Re}(\Lambda x) < \gamma \leq \mathrm{Re}(\Lambda y)$$

per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in B$;

b) se A è compatto e B è chiuso, esistono $\Lambda \in X^*$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathrm{Re}(\Lambda x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathrm{Re}(\Lambda y)$$

per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in B$.

Corollario 1.11. *Sia X uno s.v.t. localmente convesso, M un suo sottospazio e $x_0 \in X \setminus \overline{M}$. Allora esiste $\Lambda \in X^*$ tale che $\Lambda x_0 = 1$ e $\Lambda \equiv 0$ su M.*

Corollario 1.12. *Sia X uno s.v.t. localmente convesso, allora X^* separa i punti di X, cioè per ogni $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ esiste $f \in X^*$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Corollario 1.13. *Sia X uno s.v.t. localmente convesso M un suo sottospazio e f un funzionale lineare e continuo su M. Allora esiste $\Lambda \in X^*$ tale che $\Lambda \equiv f$ su M.*

1.3 Dualità.

In generale quando si è interessati a studiare le proprietà dei funzionali continui su uno s.v.t. X è utile considerare su X una topologia più debole della topologia originale (cioè con meno insiemi aperti), che abbia però lo stesso spazio di funzionali continui (un funzionale continuo per una topologia lo è anche per una più forte ma non necessariamente per una più debole). Il vantaggio di indebolire la topologia è costituito dal fatto che una topologia più debole ha più insiemi compatti, sui quali l'analisi è più agevole. La più debole topologia su X tale che renda continuo ogni funzionale di X^* si chiama appunto *topologia debole* di X. Gli aperti per tale topologia sono le intersezioni finite di insiemi del tipo $f^{-1}(V)$, dove $f \in X^*$ e $V \subseteq \mathbb{R}$ (risp. $V \subseteq \mathbb{C}$) insieme aperto. Se denotiamo X_w lo spazio X munito di questa topologia debole si ha il seguente risultato.

Teorema 1.14. *Sia X uno s.v.t. localmente convesso, allora anche X_w è uno s.v.t. localmente convesso e si ha $X_w^* = X^*$.*

Dimostrazione. Grazie al Corollario 1.12 X^* separa i punti di X, da cui segue che X_w è uno spazio di Hausdorff. Osserviamo inoltre che la topologia debole τ_w è invariante per traslazioni ed una base di intorni di 0 è data dalle intersezioni finite di insiemi convessi del tipo $V_{\Lambda,r} := \{x : \ |\Lambda x| < r\}$, dove $\Lambda \in X^*$ e $r > 0$, pertanto τ_w è una topologia localmente convessa. Resta quindi da dimostrare che l'addizione e la moltiplicazione per scalare sono operazioni continue. Dato $V = \bigcap_{i=1}^N V_{\Lambda_i,r_i}$ si ha $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$, che implica la continuità dell'addizione. La continuità della moltiplicazione per scalare segue dal fatto che gli aperti V come sopra sono *assorbenti*, cioè per ogni $x \in X$ esiste $t > 0$ tale che $x \in tV$.
Dimostriamo ora l'ultima asserzione. L'inclusione $X^* \subseteq X_w^*$ segue subito dalla definizione di topologia debole. Viceversa, sia $\Lambda \in X_w^*$, allora esiste $V \in \tau_w$ come sopra tale che $|\Lambda x| < 1$ per ogni $x \in V$. Dimostriamo che Λ è una combinazione lineare di $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N$ e quindi appartiene a X^*. Supponiamo che X sia uno spazio vettoriale reale (il caso complesso è analogo) e sia $\pi : X \to \mathbb{R}^N$ l'applicazione lineare definita come $\pi(x) := (\Lambda_1 x, \ldots, \Lambda_N x)$. Poiché $\Lambda \equiv 0$ sul sottospazio $N := \bigcap_{i=1}^N \mathrm{Ker}(\Lambda_i)$, esiste $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ lineare tale che $\Lambda x = F(\pi(x))$, pertanto Λ è una combinazione lineare di $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N$. □

Si osservi che $x_n \rightharpoonup 0$ nella topologia τ_w se e solo se $\Lambda x_n \to 0$ per ogni $\Lambda \in X^*$.
Una conseguenza del Teorema 1.10 è il seguente

Teorema 1.15. *sia X uno spazio localmente convesso e sia $E \subset X$ un sottoinsieme convesso, allora la chiusura debole di E è $\overline{E}$.*

Dal precedente teorema discende il seguente

Corollario 1.16. *Sia X di Fréchet e $x_n \rightharpoonup x \in X$. Allora esiste una successione $\{y_i\}$ tale che $y_i \to x$ e ogni y_i e combinazione lineare di un numero finito di elementi della successione $\{x_n\}$.*

Dimostrazione. Sia H l'inviluppo convesso dei punti x_n, allora per il Teorema 1.15 $x \in \overline{H}$ e quindi, poiché X è metrizzabile, esiste una successione $\{y_i\}$ con le proprietà cercate. □

Così come X^* induce la topologia debole su X, anche X induce una topologia su X^* in maniera analoga. Infatti ad ogni elemento di $x \in X$ è possibile associare un funzionale lineare $f_x : X^* \to \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$) definito come $f_x \Lambda = \Lambda x$. Si dice *topologia debole** di X^* la più debole topologia che renda continui tutti i funzionali f_x, al variare di $x \in X$. Anche in questo caso, lo spazio X^* è uno s.v.t. localmento convesso munito della topologia debole* (questo accade anche se lo s.v.t. X non è localmente convesso). Lo spazio X^* munito della topologia debole* ha un'importante proprietà di compattezza.

Teorema 1.17 (Banach-alaoglu). *Sia X uno s.v.t. e sia V un intorno di 0. Allora l'insieme*
$$K_V := \Big\{\Lambda \in X^* : \ |\Lambda x| \le 1 \text{ per ogni } x \in V\Big\}$$
è compatto nella topologia debole (K_V viene chiamato* polare *di V).*

Dimostrazione. Poiché V è un intorno di 0, per ogni $x \in X$ esiste $\gamma_x \in \mathbb{R}$, $\gamma_x > 0$ tale che $x \in \gamma_x V$. Sia P il prodotto cartesiano degli insiemi D_x al variare di $x \in X$, dove D_x è l'insieme degli scalari α tali che $|\alpha| \le \gamma_x$. Poiché D_x è compatto per ogni x, per il teorema di Tychonoff anche P è compatto, se munito della topologia prodotto. Notiamo che $K_V \subset X^* \cap P$. La tesi segue osservando che K_V è un sottoinsieme chiuso di P (e quindi compatto) e che la topologia indotta da P su K_V coincide con quella indotta da X^*. $\square$

Osserviamo che, in questo contesto, la compattezza non implica automaticamente la compattezza per successioni.

Osservazione 1.18. *Se lo spazio X è separabile, allora ogni compatto $K \subset X^*$ per la topologia debole* è metrizzabile e quindi anche compatto per successioni.*

Se X è uno spazio normato, su X^* è definita anche una topologia più forte (che chiameremo topologia forte), indotta dalla norma duale

$$\|\Lambda\| := \sup_{x \in X:\ \|x\| \leq 1} |\Lambda x| \qquad \Lambda \in X^*.$$

In questo caso il Teorema 1.17 asserisce che la palla unitaria chiusa in X^* (per la norma duale) è debole* compatta (e lo stesso vale per ogni insieme convesso chiuso e limitato). Osserviamo che, in uno spazio normato X, la palla unitaria chiusa è compatta per la topologia forte se e solo se X è uno spazio di Banach di dimensione finita.
Enunciamo, senza dimostrazione, il seguente importante risultato.

Teorema 1.19 (Wierstrass). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia P_N lo spazio dei polinomi di N variabili, allora P_N è denso in $C^k(\overline{\Omega})$ per ogni k.*

Corollario 1.20. *Lo spazio $C^\infty(\Omega)$ è separabile.*

Dimostrazione. Dimostriamo che P_N ristretto ad Ω è denso in $C^\infty(\Omega)$. Sia quindi $f \in C^\infty(\Omega)$, $\epsilon > 0$ e p_n la seminorma in $C^\infty(\Omega)$ definita nell'Esempio 4. Sia inoltre V_n un intorno aperto di K_n tale che $\overline{V_n} \subset \Omega$, allora $f|_{V_n} \in C^n(\overline{V_n})$ e quindi, per il Teorema 1.19, esiste $q_n \in P_N$ tale che $p_n(q_n - f) \leq \|q_n - f\|_{C^n(\overline{V_n})} < \epsilon$. $\square$

Corollario 1.21. *Sia $K \subset \Omega$ compatto, $\phi \in \mathcal{D}_K$ e $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in K$. Allora esiste una successione di polinomi $q_n \in P_N$ tale che $q_n f \to \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Basta scegliere una successione q_n che converga a ϕ/f in $C^\infty(\Omega)$. $\square$

2 Distribuzioni.

Le distribuzioni, o funzioni generalizzate, nascono dall'esigenza di trattare operatori consueti in fisica, come la cosiddetta delta di Dirac. Consideriamo la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, definite come $f_n(x) = n^N \rho(nx)$, dove $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ è una funzione positiva a supporto compatto e tale che $\int_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx = 1$. Una tale successione verrà chiamata nel seguito *successione di mollificatori*. La successione f_n appartiene alla palla unitaria dello spazio $L^1(\mathbb{R}^N)$, ma non converge in L^1 neppure nella topologia debole. Nonostante questo, data una funzione $g \in C(\mathbb{R}^N)$, la successione $\int_{\mathbb{R}^N} f_n g \, dx$ converge al valore $g(0)$. Tradizionalmente si chiama delta di Dirac in 0 (indicata con δ_0) l'operatore in $C(\mathbb{R}^N)^*$ definito come $\delta_0(g) = g(0)$ per ogni $g \in C(\mathbb{R}^N)$ ed in qualche modo rappresenta il limite della successione f_n.

2.1 Funzioni test.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $K \subset \Omega$ un sottoinsieme compatto, definiamo $\mathcal{D}_K \subset C^\infty(\Omega)$ come lo spazio generato da tutte le funzioni in $C^\infty(\Omega)$ con supporto contenuto in K. $\mathcal{D}_K$ è un sottospazio chiuso di $C^\infty(\Omega)$ e quindi è uno spazio di Fréchet con la topologia indotta. Definiamo inoltre $\mathcal{D}(\Omega)$ come l'unione degli spazi $\mathcal{D}_K$ al variare del compatto $K \subset \Omega$, tale spazio è solitamente chiamato *spazio delle funzioni test* ed è anche indicato con $C_c^\infty(\Omega)$ o $C_0^\infty(\Omega)$. Sfortunatamente $\mathcal{D}(\Omega)$ munito della topologia (metrizzabile) indotta dall'inclusione $\mathcal{D}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ non è uno spazio completo. Infatti, nel caso $\Omega = \mathbb{R}$, la successione $\psi_n = \sum_{i=1}^n \rho(x-i)/i$, dove $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ è tale che $\rho > 0$ su $(0,1)$ e $\rho(x) = 0$ per $|x| \geq 1$, è una successione di Cauchy il cui limite in $C^\infty(\mathbb{R})$ non ha supporto compatto e quindi non sta in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pertanto è necessario definire una topologia più forte su $\mathcal{D}(\Omega)$, che sarà completa ma non metrizzabile. Diremo quindi che un insieme $V \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ è aperto se $V \cap \mathcal{D}_K$ è aperto in $\mathcal{D}_K$ per ogni compatto $K \subset \Omega$.

Lemma 2.1. *Si noti che un insieme $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ è limitato se e solo se esiste un compatto $K \subset \Omega$ e costanti $C_n > 0$ tali che $\operatorname{spt}(f) \subseteq K$ e $\sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq n}} |D^\alpha f| \leq C_n$ per ogni $f \in E$.*

Dimostrazione. Poiché la topologia di $\mathcal{D}(\Omega)$ ristretta a $\mathcal{D}_K$ coincide con la topologia (metrizzabile) della convergenza uniforme, l'unica cosa da dimostrare è l'esistenza di un compatto K tale che $\operatorname{spt}(f) \subseteq K$ per ogni $f \in E$. Fissiamo una successione di compatti $\{K_n\}$ che invadono Ω e supponiamo per assurdo che esistano una successione $\{f_n\}$ in E ed una successione $\{x_n\}$ in Ω tali che $x_n \in \operatorname{spt}(f_n)$ e $x_n \notin K_n$. Definiamo $W := \{f \in \mathcal{D}(\Omega) : \; n|f(x_n)| < |f_n(x_n)|\}$. Si ha che $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ è un insieme aperto, ma $f_n \notin nW$. Ne segue che E non può essere limitato. $\square$

Osservazione 2.2. *Una successione ψ_n è di Cauchy in $\mathcal{D}(\Omega)$ se e solo se è di Cauchy in $C^\infty(\Omega)$ e tutti i supporti delle funzioni ψ_n sono contenuti in uno stesso compatto K.*

Teorema 2.3. *Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio localmente convesso, completo e non metrizzabile. Inoltre, qualunque sottoinsieme di $\mathcal{D}(\Omega)$ chiuso e limitato è compatto.*

Dimostrazione. Poiché una successione di Cauchy in ψ_n è contenuta in $\mathcal{D}_K$ per qualche K, essa converge ad un elemento $\psi \in \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$, pertanto $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio completo.

Supponiamo ora, per assurdo, che $\mathcal{D}(\Omega)$ sia metrizzabile con metrica d e sia ψ_n una successione in $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\operatorname{spt}(\psi_n) \notin K_n$ per una successione di compatti K_n che invadono Ω. Allora, per la continuità della moltiplicazione per scalare, esistono numeri $\delta_n > 0$ tali che $d(0, \delta_n \psi_n) < 1/m$, cioè la successione $\delta_n \psi_n$ tende a 0, che è assurdo.
Sia ora $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ chiuso e limitato, ma allora $E \subset \mathcal{D}_K$ per qualche K ed esistono costanti $C_n > 0$ tali che $p_n(E) \leq C_n$, dove la seminorma $p_n : \mathcal{D}_K \to \mathbb{R}$ è definita come $p_n(f) := \sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq n}} |D^\alpha f|$ per ogni $f \in \mathcal{D}_K$. Ne segue che E è compatto per Ascoli-Arzelà. □

Osservazione 2.4. *Si osservi che $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ è un insieme chiuso a parte interna vuota, pertanto $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_K \mathcal{D}_K$ è di prima categoria.*

Definiamo ora lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni infinitamente derivabili e rapidamente decrescenti all'infinito. Una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ appartiene allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se $p_{\alpha,\beta}(f) < +\infty$ per ogni coppia di multiindici (α, β), dove la famiglia di seminorme $p_{\alpha,\beta} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è definita come

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right|.$$

Tale famiglia di seminorme induce su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ una struttura di spazio di Fréchet.

Osservazione 2.5. *Si hanno le inclusioni continue e dense*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

2.2 Distribuzioni.

Dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, chiamiamo lo spazio duale $\mathcal{D}(\Omega)^*$ (risp. $C^\infty(\Omega)^*$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$), munito della topologia debole*, *spazio di distribuzioni su* Ω (risp. *spazio di distribuzioni a supporto compatto su* Ω, *spazio di distribuzioni temperate su* $\mathbb{R}^N$).

Osservazione 2.6. *Osserviamo che $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ se e solo se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste $l = l(K)$ e $C = C(K)$ tali che*

$$\Lambda \phi \leq C \; p_{K,l}(\phi) := \sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq l}} |D^\alpha \phi| \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}_K.$$

Teorema 2.7. *Gli spazi $\mathcal{D}(\Omega)^*$, $C^\infty(\Omega)^*$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ sono s.v.t. localmente convessi e completi.*

Dimostrazione. Il fatto che siano spazi localmente convessi segue subito dal Teorema 1.14, dimostriamo che sono spazi completi. Sia Λ_n una successione di Cauchy in X^*, cioè $\Lambda_n x$ è di Cauchy per ogni $x \in X$, dove X è uno dei tre spazi. Definiamo $\Lambda x = \lim_n \Lambda_n x$, vogliamo mostrare che $\Lambda \in X^*$. Poiché Λ è chiaramente lineare, verifichiamone la continuità. Nel caso in cui X sia uguale a $C^\infty(\Omega)$ o $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, poiché questi sono spazi di Fréchet, segue subito dal Corollario 1.4. Se $X = \mathcal{D}(\Omega)$, la continuità di Λ equivale alla continuità delle restrizioni di Λ ai sottospazi $\mathcal{D}_K$, per ogni compatto $K \subset \Omega$. Ma, poiché i $\mathcal{D}_K$ sono spazi di Fréchet, le restrizioni di Λ_n a $\mathcal{D}_K$ convergono alla restrizione di Λ a $\mathcal{D}_K$ che sta in $\mathcal{D}_K^*$ sempre per il Corollario 1.4. □

Osservazione 2.8. *Si hanno le inclusioni continue*

$$C^\infty(\Omega)^* \subset \mathcal{D}(\Omega)^*, \qquad C^\infty(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^* \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*.$$

Ad una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è naturalmente associata la distribuzione $\Lambda_f g := \int_\Omega fg\ dx$, per ogni $g \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il funzionale Λ_f è chiaramente lineare ed è continuo grazie al teorema di Lebesgue di passaggio al limite sotto il segno di integrale, pertanto $\Lambda_f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Queste distribuzioni sono dette *distribuzioni regolari.* Si noti che non tutte le distribuzioni sono regolari, considerando ad esempio la delta di Dirac.
A differenza delle funzioni ordinarie, le distribuzioni non hanno un valore preciso in un punto $x \in \Omega$, ciononostante ha senso parlare di supporto di una distribuzione, secondo la seguente definizione. Data una distribuzione $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, diciamo che $x \in \Omega$ appartiene al supporto di Λ se per ogni intorno aperto U di x esiste una funzione $\phi \in \mathcal{D}(U)$ tale che $\Lambda\phi \neq 0$. Il supporto di una distribuzione è un sottoinsieme chiuso di Ω, inoltre $\Lambda\phi = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\mathrm{spt}(\phi) \cap \mathrm{spt}(\Lambda) = \emptyset$.

Osservazione 2.9. *La distribuzione $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ appartiene a $C^\infty(\Omega)^*$ se e solo se* $\mathrm{spt}(\psi)$ *è un sottoinsieme compatto di Ω.*

Teorema 2.10. *Sia $\{\psi_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{D}(\Omega)^*$ tale che e $\sup_n \psi_n\phi < +\infty$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Allora esiste una sottosuccessione ψ_{n_k} ed un elemento $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ tali che $\psi_{n_k} \rightharpoonup \psi$.*

Dimostrazione. Fissiamo una successione K_j di compatti che invadono Ω. Per ogni j, la successione ψ_n induce per restrizione una successione ψ_n^j in $\mathcal{D}^*_{K_j}$, puntualmente limitata. Poiché $\mathcal{D}_{K_j}$ è uno spazio di Fréchet separabile, dal Teorema 1.2 segue che la successione ψ_n^j è equicontinua, cioè esiste un intorno V di 0 ed un insieme K_V debole* compatto tali che $\psi_n^j \in K_V$ per ogni n. Ne segue che esiste una sottosuccessione $\psi_{n_k}^j$ ed un elemento $\psi^j \in \mathcal{D}^*_{K_j}$ tali che $\psi_{n_k}^j \rightharpoonup \psi^j$. La tesi segue applicando un procedimento diagonale. □

Osservazione 2.11. *Se esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che* $\mathrm{spt}(\psi_n) \subseteq K$ *per ogni n, allora la sottosuccessione ψ_{n_k} converge a ψ in $C^\infty(\Omega)^*$ e* $\mathrm{spt}(\psi) \subseteq K$.

Una distribuzione a supporto compatto in Ω, è continua rispetto ad una seminorma del tipo $p_{K,l}(f) := \sup_{\substack{K \\ |\alpha|\leq l}} |D^\alpha f|$, $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, per qualche compatto $K \subset \Omega$ e $l \in \mathbb{N}$. Il più piccolo l per cui questo succede è detto *ordine* della distribuzione. Una distribuzione a supporto compatto di odine l si estende ad un funzionale lineare e continuo su $C^l(\Omega)$. Analogamente, data una distribuzione generica definiamo ordine della distribuzione il più piccolo intero l tale che essa si estende ad un funzionale continuo su $C^l_c(K)$, per ogni $K \subset \Omega$ (ad esempio la delta di Dirac è una distribuzione di ordine 0). Si noti che non tutte le distribuzioni hanno ordine finito.

2.3 Operazioni con le distribuzioni.

Nello spazio $\mathcal{D}(\Omega)^*$ sono definite alcune operazioni fondamentali, analoghe alle operazioni su spazi di funzioni.

Moltiplicazione per funzione. Data una funzione $f \in C^\infty(\Omega)$, definiamo l'operatore $M_f : \mathcal{D}(\Omega)^* \to \mathcal{D}(\Omega)^*$ come segue

$$M_f(\psi)(\phi) := \psi(f\phi) \qquad \text{per ogni } \psi \in \mathcal{D}(\Omega)^*,\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si verifichi che M_f definisce un'applicazione lineare e continua di $\mathcal{D}(\Omega)^*$ in sè. $M_f(\psi)$ si indica anche con $f\psi$, moltiplicazione a sinistra per la funzione f.

Derivazione. Dato un multiindice α, definiamo l'operatore $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega)^* \to \mathcal{D}(\Omega)^*$ come segue

$$D^\alpha\psi(\phi) := (-1)^{|\alpha|}\psi(D^\alpha\phi) \qquad \text{per ogni } \psi \in \mathcal{D}(\Omega)^*,\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si verifichi che D^α definisce un'applicazione lineare e continua di $\mathcal{D}(\Omega)^*$ in sè.
Si noti che per ogni multiindice α, β e ogni $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ si ha

$$D^\alpha D^\beta\Lambda = D^{\alpha+\beta}\Lambda = D^\beta D^\alpha\Lambda.$$

Osservazione 2.12. *Data una distribuzione regolare Λ_f e un multiindice α, se $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ si ha $D^\alpha\Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$.*

Osservazione 2.13. *La distribuzione δ_0 di Dirac è la derivata della distribuzione regolare Λ_H corrispondente alla funzione (detta di Heaviside)*

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Teorema 2.14. *Data una successione $\Lambda_i \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, tale che esiste il limite*

$$\Lambda\phi = \lim_{i\to\infty} \Lambda_i\phi \qquad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

si ha che $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ e

$$D^\alpha\Lambda_i \rightharpoonup D^\alpha\Lambda \qquad \text{in } \mathcal{D}(\Omega)^*$$

per ogni multiindice α.

Dimostrazione. Per il Teorema 1.2, la restrizione di Λ a $\mathcal{D}_K$ definisce un funzionale lineare e continuo per ogni compatto $K \subset \Omega$, ne segue che $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pertanto per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$D^\alpha\Lambda\phi = (-1)^{|\alpha|}\Lambda D^\alpha\phi = (-1)^{|\alpha|}\lim_{i\to\infty}\Lambda_i D^\alpha\phi = \lim_{i\to\infty} D^\alpha\Lambda_i\phi.$$

□

Prodotto diretto. Dati due aperti $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$, $i \in \{1,2\}$, poniamo $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$, $N = N_1 + N_2$. Date inoltre due distribuzioni $f_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)^*$, possiamo definire il *prodotto diretto* $f = f_1 \times f_2 \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ di f_1 e f_2 come segue. Data $\phi(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $x_i \in \Omega_i$, definiamo

$$f(\phi(x_1, x_2)) := f_1(f_2(\phi(x_1, \cdot))).$$

Questa definizione, che ha certamente senso quando f_1, f_2 sono distribuzioni regolari, è valida anche nel caso generale.

Teorema 2.15. *Dati Ω_i, f_i, ϕ come sopra, si ha*

a) $\phi_1(x_1) := f_2(\phi(x_1, \cdot)) \in \mathcal{D}(\Omega_1)$;

b) $\phi_2(x_2) := f_1(\phi(\cdot, x_2)) \in \mathcal{D}(\Omega_2)$;

c) $f_1(\phi_1) = f_2(\phi_2)$;

d) $f := f_1(\phi_1) \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

Dimostrazione. I punti $a)$ e $b)$ seguono subito dal fatto che $\phi(x_1, \cdot) \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ per ogni x_1 e l'applicazione $x_1 \to \phi(x_1, x_2)$ è infinitamente differenziabile per ogni x_2. Per quanto riguarda il punto $c)$, esso segue subito se $\phi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\eta(x_2)$. a questo punto basta osservare che tali funzioni sono dense in $\mathcal{D}(\Omega)$. L'ultimo punto segue dalla continuità delle applicazioni $\phi \to \phi_i$ da $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}(\Omega_i)$. $\square$

Convoluzione. Date due funzioni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con $p \geq 1$, definiamo *convoluzione* di f e g la funzione $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\ dy, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Osserviamo che dalla (1) segue

$$\mathrm{spt}(f * g) \subseteq \mathrm{spt}(f) + \mathrm{spt}(g).$$

Dal teorema di Fubini-Tonelli, applicando la disuguaglianza di Hölder si ottiene la stima

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p},$$

infatti

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^p}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|\ dy \right)^p dx \\
&\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |f(x-y)|\ |g(y)|^p\ dydx \\
&\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}^p = \|f\|_{L^1}^p \|g\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

Se $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ $(k \geq 0)$ e $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, è possibile definire la convoluzione $f * g$ secondo la formula (1) e risulta $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$. Se inotre $k \geq 1$ allora

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g, \qquad \text{per ogni } \alpha \text{ tale che } |\alpha| \leq k.$$

Estendiamo ora l'operatore di convoluzione alle distribuzioni. Data una funzione $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$ definiamo $\tilde{u}(y) := u(-y)$ e $\tau_x u(y) := u(y - x)$. Con queste notazioni (1) diventa

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \tau_x \tilde{f}(y) g(y)\ dy, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Date $u \in \mathcal{D}^* := \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ e $\phi \in \mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, poniamo quindi

$$u * \phi(x) := u(\tau_x \tilde{\phi}).$$

Se u ha supporto compatto, cioè $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)^*$ possiamo considerare $u * \phi$ per ogni $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Estendiamo l'operatore di traslazione τ_x alle distribuzioni

$$\tau_x u(\phi) := u(\tau_{-x}\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D},\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Teorema 2.16. *Siano $u \in \mathcal{D}^*$, $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, allora*

a) $\tau_x(u * \phi) = \tau_x u * \phi = u * \tau_x \phi$;

b) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$D^\alpha(u * \phi) = D^\alpha u * \phi = u * D^\alpha \phi$$

per ogni multiindice α;

c) $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi$.

Dimostrazione. Il punto a) è una semplice verifica.
Per quanto riguarda il punto b), dall'identità $\tau_x(\widetilde{D^\alpha \phi}) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\tau_x \tilde{\phi})$ segue subito $D^\alpha u * \phi = u * D^\alpha \phi$. Inoltre dato un vettore unitario $e \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$D_e(u * \phi) = D_e u(\tau_x \tilde{\phi}) = u(\tau_x(\widetilde{D_e \phi})) = u * D_e \phi.$$

Dimostriamo ora il punto c). Dalla relazione

$$\widetilde{\phi * \psi}(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\psi}(s) \tau_s \tilde{\phi}(t)\ ds$$

segue per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} u * (\phi * \psi)(x) &= u(\tau_x(\widetilde{\phi * \psi})) = u(\tau_{-x}(\widetilde{\phi * \psi})) = \int_{\mathbb{R}^N} \tau_x \tilde{\psi}(s) u(\tau_s \tilde{\phi})\ ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x - s)(u * \phi)(s)\ ds = (u * \phi) * \psi(x). \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.17. *Il teorema precedente è valido anche quando u ha supporto compatto e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Inoltre, se u ha supporto compatto e $\phi \in \mathcal{D}$, allora $u * \phi \in \mathcal{D}$ e* $\mathrm{spt}(u * \phi) \subseteq \mathrm{spt}(u) + \mathrm{spt}(\phi)$.

Teorema 2.18. *Siano $u \in \mathcal{D}^*$, $\phi \in \mathcal{D}$ e $f_n \in \mathcal{D}$ una successioni di mollificatori, allora*

a) $\lim_{n\to\infty} \phi * f_n = \phi$ *in* $\mathcal{D}$;

b) $\lim_{n\to\infty} u * f_n = u$ *in* $\mathcal{D}^*$.

Dimostrazione. È facile verificare che $\phi * f_n \to \phi$ uniformemente sui compatti, il punto $a)$ segue quindi dall'uguaglianza $D^\alpha(\phi * f_n) = D^\alpha\phi * f_n$ e dall'inclusione $\mathrm{spt}(\phi * f_n) \subseteq \mathrm{spt}(\phi) + \mathrm{spt}(f_n)$. Il punto $b)$ segue dal punto $c)$ del Teorema 2.16, infatti

$$u(\tilde{\psi}) = u * \psi(0) = \lim_{n\to\infty} u * f_n * \psi(0) = \lim_{n\to\infty} u * f_n(\tilde{\psi}),$$

per ogni $\psi \in \mathcal{D}$. □

Corollario 2.19. *Ogni distribuzione $u \in \mathcal{D}^*$ è limite di funzioni appartenenti a $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e quindi anche di funzioni appartenenti a $\mathcal{D}$.*

Date due distribuzioni $u, v \in \mathcal{D}^*$, di cui almeno una a supporto compatto, possiamo definire l'operatore lineare e continuo $L : \mathcal{D} \to C^\infty(\mathbb{R}^N)$ come segue

$$L\phi := u * (v * \phi).$$

Definiamo quindi il prodotto di convoluzione tra u e v come la distribuzione $u * v \in \mathcal{D}^*$

$$u * v(\phi) := u(\widetilde{v * \tilde{\phi}}) = L\tilde{\phi}(0) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Si ha quindi $L(\phi) = (u * v) * \phi$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, cioè

$$(u * v) * \phi = u * (v * \phi).$$

Teorema 2.20. *Siano $u, v, w \in \mathcal{D}^*$, allora*

a) il prodotto di convoluzione $* : \mathcal{D}^* \times C^\infty(\Omega)^* \to \mathcal{D}^*$ definisce un operatore bilineare e continuo;

b) se u o v ha supporto compatto allora $u * v = v * u$ e

$$\mathrm{spt}(u * v) \subseteq \mathrm{spt}(u) + \mathrm{spt}(v);$$

c) se almeno due tra u, v, w hanno supporto compatto allora $(u * v) * w = u * (v * w)$;

d) sia δ_0 la delta di Dirac e α un multiindice, allora

$$(D^\alpha \delta_0) * u = D^\alpha u,$$

in particolare $\delta_0 * u = u * \delta_0 = u$;

e) se u o v ha supporto compatto allora

$$D^\alpha(u * v) = D^\alpha u * v = u * D^\alpha v$$

per ogni multiindice α.

Spazi di Sobolev.

Una motivazione per introdurre gli spazi di Sobolev viene dall'analisi dell'equazione differenziale

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \qquad x \in (a,b), \tag{3}$$

dove f è un'assegnata funzione su (a,b) sufficientemente regolare. Un modo per cercare una soluzione del problema è quello di moltiplicare l'equazione (3) per una funzione test $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ e integrare su (a,b). Integrando per parti, si ottiene

$$\int_a^b (u'\phi' + u\phi - f\phi)\, dx = 0.$$

La precedente espressione corrisponde alla variazione prima del funzionale (convesso)

$$F(u) := \int_a^b \left(\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} - fu \right)\, dx,$$

Di conseguenza, sembra ragionevole cercare una soluzione dell'equazione (3) tra i minimi del funzionale F su $C^1(a,b)$. Tale metodo di risoluzione viene detto *metodo variazionale.* Volendo applicare il teorema di Banach-Alaoglu per ottenere un minimo di F, una norma su $C^1(a,b)$ naturale per il problema (controllata dalla norma standard) è

$$\|u\|_{H^1} := \left(\int_a^b \left(u'^2 + u^2\right)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sfortunatamente, è facile verificare che $C^1(a,b)$ non è uno spazio completo rispetto a tale norma. Indicando con $H^1(a,b) \subset L^2(a,b)$ il suo completamento, otteniamo il principale rappresentante dei cosiddetti *spazi di Sobolev.*
Vediamo ora un modo più diretto di deinire tali spazi, usando la teoria delle distribuzioni.

Definizione 2.21. *Sia $1 \le p \le +\infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, definiamo lo spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ le cui derivate distribuzionali $D^\alpha u$, per ogni multiindice α tale che $|\alpha| \le k$, coincidono come elementi di $\mathcal{D}(\Omega)^*$ con funzioni L^p (scriveremo per brevità $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$). Tale spazio è munito della norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, poniamo $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Osserviamo che si ha $\mathcal{D}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$ con immersioni continue, per ogni $1 \le p \le +\infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.22. *Definiamo $W_0^{k,p}(\Omega)$ (risp. $H_0^k(\Omega)$) come la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ (ris. $H^k(\Omega)$).*

Proposizione 2.23. *$W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach e $H^k(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert per ogni (p,k), inoltre $W^{k,p}(\Omega)$ è riflessivo se $1 < p < +\infty$ ed è separabile se $1 \leq p < +\infty$.*

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione quando $k = 1$, il caso generale si dimostra analogamente. Si consideri l'operatore $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^{N+1}$ definito da $T(u) := (u, Du)$. Tale opratore è un isomorfismo tra spazi di Banach, pertanto $W^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $L^p(\Omega)^{N+1}$. La tesi segue quindi dalle analoghe proprietà degli spazi $L^p(\Omega)$. □

Approssimazione di funzioni $W^{1,p}$.

Proposizione 2.24. *Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p < +\infty$ esiste una successione $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n|_\Omega \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n|_{\Omega'} \to \nabla u|_{\Omega'}$ in $L^p(\Omega')^N$, per ogni aperto limitato Ω' tale che $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.*

Dimostrazione. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e sia ρ_n una successione di mollificatori. Estendiamo la funzione u a tutto $\mathbb{R}^N$ ponendola a zero fuori da Ω e chiamiamo $\overline{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tale estensione. La successione $v_n := \overline{u} * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ è tale che $v_n|_\Omega \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla v_n|_{\Omega'} \to \nabla u|_{\Omega'}$ in $L^p(\Omega')^N$, per ogni aperto Ω' con chiusura compatta in Ω. A questo punto basta approssimare v_n in $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ con funzioni $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. □

Se $N > 1$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Diciamo che Ω ha bordo di classe C^k se $\partial\Omega$ può essere scritto come grafico di una funzione C^k in un intorno di ogni suo punto (quando $N = 1$ tutti gli intervalli avranno per noi bordo C^∞).
Enunciamo senza dimostrarlo il seguente risultato di approssimazione.

Teorema 2.25 (Meyers-Serrin). *Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ lo spazio $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p < +\infty$. Se inoltre Ω è di classe C^1, allora $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p < +\infty$.*

Estensioni.
Vediamo ora quando una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ può essere estesa ad una funzione $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Osserviamo che l'estensione banale, ottenuta ponendo $u = 0$ fuori da Ω, non sta in generale in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 2.26. *Sia Ω di classe C^1 con $\partial\Omega$ limitato, e sia $V \supset \overline{\Omega}$ un insieme aperto. Allora per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ esiste un operatore lineare di prolungamento*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha

1. *$P(u) = u$ quasi ovunque in Ω;*
2. *$\mathrm{spt}(P(u)) \subset V$;*
3. $$\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$
   dove la costante $C > 0$ dipende solo da p, Ω, V.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \partial\Omega$. Supponiamo inizialmente $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e che $\partial\Omega$, vicino a x_0 coincida con l'iperpiano $\{x_N = 0\}$, cioè che esista $\rho > 0$ tale che $\Omega \cap B_\rho(x_0) = \{x_N > 0\} \cap B_\rho(x_0)$. Estendiamo quindi u ad una funzione $\bar{u}$, definita su tutta la palla $B := B_\rho(x_0)$, ponendo

$$\bar{u}(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) := 4u(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N/2) - 3u(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N)$$

quando $x_N \leq 0$. Si verifica che tale estensione è di classe C^1 in B, inoltre

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega\cap B)},$$

dove la costante C non dipende da u.
Nel caso in cui $\partial\Omega$ non sia piatto vicino a x_0, poiché $\partial\Omega$ è di classe C^1, esiste un intorno U del punto x_0 e un diffeomorfismo (di classe C^1) $\Phi : U \to \mathbb{R}^N$ tale che $\Phi(x_0) = 0$ e $\Phi(\Omega \cap U) = \{x_N > 0\} \cap \Phi(U)$. Detta $v(y) := u(\Phi^{-1}(y)) \in W^{1,p}(\Phi(U))$ e scelto $\rho > 0$ tale che $B := B_\rho(0) \subset \Phi(U)$, per quanto detto sopra esiste un'estensione $\bar{v} \in W^{1,p}(B)$ della funzione v su tutto B. Cambiando ancora variabili e ponendo $\bar{u}(x) := \bar{v}(\Phi(x))$ otteniamo un'estensione $\bar{u}$ di u in un intorno $U' \subset U$ di x_0 tale che

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(U')} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega\cap U)}.$$

Poiché $\partial\Omega$ è compatto, esiste un numero finito di punti $x_i \in \partial\Omega$, $1 \leq i \leq n$, di intorni aperti U_i di x_i tali che $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ e di funzioni estese $\bar{u}_i \in W^{1,p}(U_i)$ definite come sopra. Sia U_0 un insieme aperto tale che $\overline{U_0} \subset \Omega$ e sia ξ_i, $0 \leq i \leq n$, una partizione dell'unità associata a $U_0, \ldots, U_n$. Allora la funzione $\bar{u} := \sum_{i=0}^n \xi_i \bar{u}_i$ (dove poniamo $\bar{u}_0 := u$) è un estensione di u a tutto $\mathbb{R}^N$ di classe C^1 e tale che

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{4}$$

Scegliendo opportunamente gli intorni U_i possiamo inoltre assumere $\mathrm{spt}(\bar{u}) \subset V$.
Consideriamo ora il caso generale. Grazie al Teorema 2.25, possiamo approssimare una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con una successione di funzioni $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Dalla stima (4) applicata alle funzioni u_m si ha

$$\|\bar{u}_m - \bar{u}_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

cioè la successione $\bar{u}_m$ è di Cauchy in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Detto $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ il suo limite, abbiamo che $P(u) := \bar{u}$ è l'estensione cercata. □

Osserviamo che, quando $N = 1$, la costante C del precedente teorema non dipende da p.

Osservazione 2.27. *Se supponiamo $\partial\Omega$ di classe C^2, allora l'operatore di estensione P precedentemente definito è anche un operatore lineare e continuo da $W^{2,p}(\Omega)$ a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Anche nel caso generale $\partial\Omega$ di classe C^k esiste un operatore di estensione lineare e continuo da $W^{k,p}(\Omega)$ a $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, la cui definizione è però più complicata.*

Tracce.
Le funzioni L^p, diversamente dalle funzioni continue, sono definite a meno di insiemi di misura nulla e pertanto non ha senso di parlare del loro valore in un punto o sul bordo di un insieme, anche se regolare. Vediamo che questo non è del tutto vero nel caso di funzioni $W^{1,p}$.

Teorema 2.28. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto di classe C^1 con $\partial\Omega$ limitato. Allora, esiste un operatore lineare e continuo $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha*

1. *$T(u) = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;*
2. $$\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$
   dove la costante $C > 0$ dipende solo da p, Ω.

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $p < +\infty$, il caso $p = +\infty$ segue facilmente dal Teorema 2.40.
Supponiamo $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e siano x_0, $B := B_\rho(x_0)$ come nella dimostrazione del Teorema 2.26 tali che $\partial\Omega \cap B = \{x_N = 0\} \cap B$. Se prendiamo $\xi \in \mathcal{D}(B)$ tale che $\xi \geq 0$ e $\xi \equiv 1$ su $\hat{B} := B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$, abbiamo la stima

$$\int_{\partial\Omega\cap\hat{B}} |u|^p \, dx' \leq \int_{\partial\Omega\cap B} \xi|u|^p \, dx' = -\int_{\Omega\cap B} D_{x_N}(\xi|u|^p) \, dx \leq C \int_{\Omega\cap B} (|u|^p + |Du|^p) \, dx$$

dove $x' := (x_1, \ldots, x_{N-1})$. Se $\partial\Omega$ non è piatto in un intorno di x_0, lo si può rendere tale attraverso un diffeomorfismo Φ come nella dimostrazione del Teorema 2.26, così da ottenere la stima

$$\int_{\partial\Omega\cap\hat{B}} |u|^p \, dx' \leq C \int_{\Omega\cap B} (|u|^p + |Du|^p) \, dx.$$

Poiché $\partial\Omega$ è compatto, possiamo scegliere un numero finito di punti $x_i \in \partial\Omega$, $1 \leq i \leq n$ e di intorni aperti U_i di x_i tali che $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ e

$$\|u\|_{L^p(U_i\cap\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Pertanto

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

per qualche costante C indipendente da u.
Sia ora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e sia $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ una successione convergente a u in $W^{1,p}(\Omega)$. Allora

$$\|u_m|_{\partial\Omega} - u_k|_{\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

cioè la successione $u_m|_{\partial\Omega}$ è di Cauchy in $L^p(\partial\Omega)$ e pertanto converge ad un limite $T(u) \in L^p(\partial\Omega)$. Osserviamo che $T(u)$ non dipende dalla successione approssimante u_m e

$$\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, la funzione $T(u)$ si chiama *traccia* di u su $\partial\Omega$.
Il seguente risultato, che riportiamo senza dimostrazione, caratterizza le funzioni a traccia nulla su $\partial\Omega$.

Teorema 2.29. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto di classe C^1 con $\partial\Omega$ limitato e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $T(u) = 0$ su $\partial\Omega$.*

Quando $N = 1$ possiamo dire qualcosa di più, infatti le funzioni $W^{1,p}(I)$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, hanno sempre un rappresentante continuo e vale una specie di teorema fondamentale del calcolo.

Teorema 2.30. *Per ogni $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq +\infty$, esiste un rappresentante $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tale che $u = \tilde{u}$ quasi ovunque e per ogni $c, d \in \bar{I}$ si ha*

$$\tilde{u}(c) - \tilde{u}(d) = \int_c^d u'(x)\ dx. \tag{5}$$

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in I$ e poniamo $\bar{u}(x) = \int_{x_0}^x u'(s)\ ds$. Si ha che $\bar{u} \in C(\bar{I})$ per l'assoluta continuità dell'integrale, inoltre dal teorema di Fubini segue che per ogni $\phi \in \mathcal{D}(I)$

$$\int_I \bar{u}\phi' = -\int_I u'\phi = \int_I u\phi'.$$

Esiste quindi una costante C tale che $u - \bar{u} = C$ quasi ovunque, pertanto la funzione $\tilde{u} := \bar{u} + C$ ha le proprietà richieste. □

Osserviamo che in generale una funzione $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ può non essere continua, anche se, come vedremo nel prossimo paragrafo, lo è sempre quando $p > N$.

Disuguaglianze di Sobolev.

Cominciamo dal seguente risultato nel caso particolare $N = k = 1$.

Teorema 2.31. *Per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ esiste una costante $C = C(I)$ tale che per ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq +\infty$, si ha*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}. \tag{6}$$

Se I è limitato si ha inoltre

1. *$W^{1,p} \subset C(\overline{I})$ con immersione compatta per ogni $p > 1$;*
2. *$W^{1,1} \subset L^q(I)$ con immersione compatta per ogni $q < +\infty$.*

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare (6) nel caso particolare $I = \mathbb{R}$ e $u \in C_c^1(\mathbb{R})$. Allora, utilizzando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo

$$|u|^p(x) = \int_{-\infty}^x p|u|^{p-1}(s)u'(s)\ ds \leq p\|u\|_{L^p}^{p-1}\|u'\|_{L^p}$$

e quindi, per la disuguaglianza di Young,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}.$$

Il caso $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ segue per approssimazione con funzioni $u_m \in C_c^1(\mathbb{R})$, grazie al Teorema 2.25. Se $u \in W^{1,p}(I)$, allora per il Teorema 2.26 esiste un'estensione $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tale che $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$. La tesi segue quindi da quanto dimostrato in precedenza.
Dimostriamo che $W^{1,p}(I)$ si immerge con compattezza in $C(\overline{I})$ per $p > 1$. Dati $x, y \in I$, da (5) otteniamo

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'|(s)\ ds \leq \|u'\|_{L^p}|x-y|^{\frac{1}{p'}}$$

La tesi segue quindi dal Teorema di Ascoli-Arzelà.
Dimostriamo che $W^{1,1}(I)$ si immerge con compattezza in $L^q(I)$ per $q < +\infty$. Sia $D_1 := \{u \in W^{1,1}(\mathbb{R}) : \|u\|_{W^{1,1}} \leq 1\}$. Per il Teorema 2.26 $\{u \in W^{1,1}(I) : \|u\|_{W^{1,1}} \leq 1/C\} \subset D_1 \cap W^{1,1}(I)$, pertanto è sufficiente dimostrare che le restrizioni ad I delle funzioni appartenenti a D_1 sono un insieme relativamente compatto in $L^q(I)$. Per il Teorema di Riesz-Kolmogorov, dobbiamo quindi dimostrare che $\lim_{h\to 0} \|\tau_h u - u\|_{L^q(\mathbb{R})} = 0$ uniformemente in D_1. Si ha infatti

$$|u(x-h) - u(x)| \leq \int_{x-h}^{x} |u'|(s)\ ds \leq |h| \int_{-1}^{0} |u'|(x+sh)\ ds.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x-h) - u(x)|^q\ dx &\leq (2\|u\|_{L^\infty})^{q-1} \int_{\mathbb{R}} |u(x-h) - u(x)|\ dx \\ &\leq C|h| \int_{\mathbb{R}\times(-1,0)} |u'|(x+sh)\ dxds \leq C|h|. \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.32. *L'immersione di $W^{1,1}$ in $C(\overline{I})$ è continua ma non è mai compatta.*

Corollario 2.33. *Dalla (6) segue che per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, con $p < +\infty$, si ha*

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0.$$

Nel caso dello spazio $W_0^{1,p}$, la norma L^p della derivata è sufficiente a controllare l'intera norma $W^{1,p}$, vale infatti la seguente disuguaglianza.

Proposizione 2.34 (Disuguaglianza di Poincaré). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato, allora esiste $C = C(I)$ tale che*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in I = (a,b)$, si ha

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| \leq \int_a^b |u'|(s)\ ds \leq C\|u'\|_{L^p}.$$

□

Consideriamo ora il caso generale $N \geq 1$. Descriveremo i risultati principali rimandando al testo di riferimento per le dimostrazioni.
Dato $1 \leq p < N$ definiamo l'esponente coniugato di p come

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Osserviamo che si ha sempre $p^* > p$ e

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Cominciamo con la seguente importante disuguaglianza.

Teorema 2.35 (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Per ogni $1 \le p < N$, esiste $C = C(p, N)$ tale che*
$$\|u\|_{L^{p^*}} \le C\|\nabla u\|_{L^p}$$
per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Corollario 2.36. *Sia $1 \le p < N$. Allora, per ogni $q \in [p, p^*]$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si immerge con continuità in $L^q(\mathbb{R}^N)$. Nel caso limite $p = N$ si ha che $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ si immerge con continuità in $L^q(\mathbb{R}^N)$ per ogni $q < +\infty$.*

Osserviamo che $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ non è contenuto in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, basta infatti considerare la funzione $u(x) = (-\log(|x| \wedge 1))^\alpha$, con $0 < \alpha < (N-1)/N$.

Teorema 2.37 (Morrey). *Per ogni $p > N$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si immerge con continuità in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Osserviamo che dal teorema precedente segue che per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, con $p > N$, si ha
$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Nel caso di un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di classe C^1, con bordo limitato, valgono risultati analoghi.

Corollario 2.38. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto di classe C^1 con $\partial\Omega$ limitato, allora*

1. *se $1 \le p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$;*
2. *se $p = N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $p \le q < +\infty$;*
3. *se $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$;*

con immersioni continue.

Osserviamo inoltre che, se $p > N$ e Ω è come sopra, , si ha (a meno della scelta di un rappresentante) $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ ed esiste una costante $C = C(p, N, \Omega)$ tale che
$$|u(x) - u(y)| \le C\|u\|_{W^{1,p}}\, |x - y|^\alpha,$$
per ogni $x, y \in \Omega$, dove $\alpha = 1 - N/p$.
Quando l'insieme Ω è limitato, alcune delle precedenti immersioni sono compatte.

Teorema 2.39 (Rellich-Kondrachov). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe C^1, allora*

1. *se $1 \le p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $1 \le q < p^*$;*
2. *se $p = N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $1 \le q < +\infty$;*
3. *se $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$;*

con immersioni compatte.

Osserviamo che se Ω non è limitato le precedenti immersioni non sono compatte in generale, inoltre l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ non è mai compatta. Le funzioni $W^{1,\infty}(\Omega)$ possono essere caratterizzate più precisamente, vale infatti il seguente risultato.

Teorema 2.40. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto di classe* C^1 *con* $\partial\Omega$ *limitato. Allora* $u \in L^\infty(\Omega)$ *è lipschitziana se e solo se* $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Anche la disuguaglianza di Poicaré ha un'analoga versione in $\mathbb{R}^N$.

Proposizione 2.41 (Disuguaglianza di Poincaré in $\mathbb{R}^N$). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto limitato, allora esiste* $C = C(p, \Omega)$ *tale che*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}.$$

Se inoltre Ω *è connesso e di classe* C^1*, si ha anche*

$$\left\|u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\ dx\right\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}.$$

Concludiamo osservando che valgono analoghi risultati di immersione per gli spazi $W^{k,p}$. Per semplicità di esposizione poniamo nel prossimo teorema $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$.

Teorema 2.42. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto di classe* C^1 *con* $\partial\Omega$ *limitato, allora*

1. $W^{k,p}(\Omega)$ *si immerge con continuità in* $W^{j,q}(\Omega)$*, con* $q < +\infty$*, se* $k > j$ *e* $k - (N/p) \geq j - (N/q)$*, inoltre l'immersione è compatta se* Ω *è limitato e vale il* $>$*;*

2. $W^{k,p}(\Omega)$ *si immerge con continuità in* $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$*, con* $\gamma > 0$*, se* $k - (N/p) \geq m + \gamma$*, inoltre l'immersione è compatta se* Ω *è limitato e vale il* $>$.

Trasformata di Fourier.

Data una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ chiamiamo *trasformata di Fourier* di f la funzione $\hat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ definita da

$$\hat{f}(t) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dx. \tag{7}$$

Si noti che tale funzione non è sempre ben definita. Chiamiamo *antitrasformata* di f la funzione

$$\check{f}(x) := \hat{f}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{i\langle t,x\rangle}\, dt.$$

Proprietà elementari della trasformata di Fourier.

a) $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$;

b) $\check{f}(x) = \hat{f}(-x) = \widehat{f(-t)}(x)$, $\hat{\hat{f}}(x) = \overline{\hat{f}(-x)}$, $\widehat{f(t/\lambda)}(x) = |\lambda|^N \hat{f}(\lambda x)$ per ogni $\lambda \neq 0$;

c) $f\widehat{(x-v)}(t) = e^{-i\langle v,t\rangle} \hat{f}(t)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^N$;

d) $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}\hat{g}$;

e) $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \hat{f}$ uniformemente continua;

f) $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f\hat{g}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f} g\, dx$.

Poiché *a*), *b*) e *c*) seguono subito dalle definizioni, dimostriamo solo le altre proprietà.
Date $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ha per il teorema di Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \widehat{f * g} &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dy\, dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x-y) e^{-i\langle t,x-y\rangle} g(y) e^{-i\langle t,y\rangle}\, dy\, dx = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}\hat{g}. \end{aligned}$$

Inoltre, per il teorema di convergenza dominata

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \|\hat{f}(t+h) - \hat{f}(t)\|_{L^\infty} &= \lim_{h\to 0} \|(e^{-i\langle h,x\rangle} \widehat{f(x) - f(x)})\|_{L^\infty} \\ &\le \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{-i\langle h,x\rangle} f(x) - f(x) \right|\, dx = 0, \end{aligned}$$

cioè f è uniformemente continua.
Infine, sempre per Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(t)\hat{g}(t)\, dt &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} e^{-i\langle t,x\rangle} f(t) g(x)\, dx\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x) g(x)\, dx. \end{aligned}$$

La traformata di funzioni integrabili.

Restringiamo ora la nostra analisi allo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, su cui la trasformata di Fourier ha un comportamento particolarmente buono.

Lemma 2.43. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ allora anche $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, inoltre l'immersione così definita è continua. In particolare, per ogni multiindice α si ha*

$$\widehat{x^\alpha f} = i^{|\alpha|} D_\alpha \hat{f}, \qquad \widehat{D_\alpha f} = i^{|\alpha|} t^\alpha \hat{f}. \tag{8}$$

Dimostrazione. Dimostriamo direttamente (8), da cui segue la tesi. È suffuciente mostrare la tesi quando $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$, il caso generale si ottiene analogamente. Usando il teorema di convergenza dominata, calcoliamo

$$D_{t_1} \hat{f}(t) = -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle t,x \rangle} x_1 f(x)\ dx = -i\ \widehat{x_1 f}.$$

Analogamente, integrando per parti, otteniamo

$$\widehat{D_{x_1} f} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle t,x \rangle} D_{x_1} f(x)\ dx = \frac{i\ t_1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle t,x \rangle} f(x)\ dx = i\ t_1 \hat{f}.$$

□

Lemma 2.44. *Si ha $\widehat{e^{-\frac{|x|^2}{2}}} = e^{-\frac{|t|^2}{2}}$.*

Dimostrazione. Detta $F(t) := \widehat{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}(t)$, integrando per parti, otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla F(t) &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle t,x \rangle} (-x e^{-\frac{|x|^2}{2}})\ dx \\ &= -\frac{t}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle t,x \rangle} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\ dx = -tF(t), \end{aligned}$$

da cui segue $F(t) = Ce^{-\frac{|t|^2}{2}}$ per qualche $C \in \mathbb{R}$. La tesi segue osservando che

$$C = F(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\ dx = 1.$$

□

Proposizione 2.45. *Si ha $\check{\hat{f}} = f$ per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. Data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e posta $g(x) := (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, grazie al Lemma 2.44 e alle proprietà elementari della trasformata, abbiamo

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}\left(\frac{z}{\epsilon}\right) f(x_0 - z)\ dz \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{g(\epsilon y)}(z) f(x_0 - z)\ dz = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon y) \widehat{f(x_0 - z)}(y)\ dy \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon y) e^{i\langle x_0, -y \rangle} \hat{f}(-y)\ dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle x_0, y \rangle} \hat{f}(y)\ dy = \check{\hat{f}}(x_0). \end{aligned}$$

□

Corollario 2.46. *La trasformata di Fourier definisce un omomorfismo lineare e surgettivo da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

Proposizione 2.47 (Riemann-Lebesgue). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^N)$, inoltre l'immersione così definita è iniettiva.*

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è un sottoinsieme denso di $L^1(\mathbb{R}^N)$ e la trasformata di Fourier è un operatore continuo da $L^1(\mathbb{R}^N)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, si ha

$$\widehat{L^1(\mathbb{R}^N)} \subseteq \overline{\widehat{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}} \subseteq \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} = C_0(\mathbb{R}^N),$$

dove la chiusura va intesa nello spazio $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per dimostrare l'iniettività dell'immersione, osserviamo che, per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\hat{f} \equiv 0$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\hat{g}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f} g\, dx = 0 \qquad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

che implica $f \equiv 0$, poiché la trasformata di Fourier è surgettiva da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in sè. $\square$

I seguenti corollari sono utili per estendere la trasformata di Fourier da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $L^2(\mathbb{R}^N)$ e a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$.

Corollario 2.48.

a) $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \check{\hat{f}} = f$ (in particolare $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$);

b) $f, D_\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \widehat{D_\alpha f} = i^{|\alpha|} t^\alpha \hat{f}$;

c) $f, x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \widehat{x^\alpha f} = i^{|\alpha|} D_\alpha \hat{f}$.

Dimostrazione. a) Per ogni $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} fg\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\hat{\check{g}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}\check{g}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \check{\hat{f}} g\, dx.$$

b) Come nel punto precedente, per ogni $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{D_\alpha f} g\, dt &= \int_{\mathbb{R}^N} D_\alpha f \hat{g}\, dt = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} f D_\alpha \hat{g}\, dt \\ &= i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} f \widehat{x^\alpha g}\, dt = i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} t^\alpha \hat{f} g\, dt. \end{aligned}$$

c) Si dimostra in maniera analoga.

$\square$

Corollario 2.49. *Per ogni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, si ha*

a) $\langle f, g\rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2}$ e quindi $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$;

b) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}\hat{g}$;

c) $\widehat{fg} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \hat{f} * \hat{g}$.

Poiché $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^N)$, dal Corollario 2.49 si ottiene il seguente importante risultato.

Teorema 2.50 (Plancherel). *La trasformata di Fourier definisce un'isometria surgettiva da $L^2(\mathbb{R}^N)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Osserviamo che l'estensione per densità della trasformata di Fourier su tutto $L^2(\mathbb{R}^N)$ coincide su $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ con la definizione di trasformata data mediante la formula (7). Vale inoltre la seguente regola di calcolo.

Proposizione 2.51. *Per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ si ha*

$$\hat{f}(t) = \lim_{h \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{|x| \le h} e^{-i\langle t,x \rangle} f(x)\ dx.$$

Corollario 2.52. *Per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, valgono le seguenti proprietà:*

a) $\int_{\mathbb{R}^N} f\hat{g}\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}g\ dx$;

b) se $f * g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, *allora* $\hat{f}\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *e* $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}\hat{g}$;

c) se $\hat{f}\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, *allora* $f * g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *e* $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}\hat{g}$.

La trasformata di distribuzioni temperate.

Ricordiamo che lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ delle distribuzioni temperate o a crescita controllata contiene tutti i polinomi, è chiuso per derivazione ed è chiuso per moltiplicazione per funzioni C^∞ a crescita polinomiale con tutte le derivate. Inoltre, data $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si ha $u * \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$. Ricordiamo inoltre che la nozione di distribuzione (così come quella di prodotto di convoluzione) si estende in maniera naturale a funzioni a valori complessi ponendo $u(f + ig) = u(f) + iu(g)$, si richede cioè che la distribuzione definisca un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare.
Estendiamo ora per dualità la nozione di trasformata (e antitrasformata) di Fourier alle distribuzioni temperate. Data $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ definiamo

$$\hat{u}(\phi) := u(\hat{\phi}), \qquad \check{u}(\phi) := u(\check{\phi}), \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

In particolare $\hat{u}, \check{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$, inoltre le immersioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ in sè stesso così definite sono continue (e quindi sequenzialmente continue) rispetto alla topologia debole* su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$.
Come conseguenza delle analoghe proprietà della trasformata ristretta allo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e α multiindice si ha

$$\check{\hat{u}} = u, \quad \widehat{u * \phi} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{\phi}\hat{u}, \quad \widehat{D_\alpha u} = i^{|\alpha|} t^\alpha \hat{u}, \quad \widehat{x^\alpha u} = i^{|\alpha|} D_\alpha \hat{u}.$$

Osserviamo che vale una formula analoga nel caso di convoluzione di distribuzioni.

Lemma 2.53. *Date $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ e $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)^*$, si ha $u * v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ e $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{v}\hat{u}$.*

Nel caso di distribuzioni a supporto compatto, la trasformata di Fourier ha un comportamento particolarmente regolare.

Lemma 2.54. *Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)^*$, allora $\hat{u}$ è una funzione C^∞ e vale la formula*

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \, u\left(e^{-i\langle t,\cdot\rangle}\right). \tag{9}$$

Dimostrazione. Data $\phi \in \mathcal{D}$ tale che $\phi \equiv 1$ sul supporto di u, si ha

$$\hat{u} = \widehat{\phi u} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \, \hat{u} * \hat{\phi}.$$

Osservando che $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ e $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, con un ragionamento analogo a quello del Teorema 2.16, punto *b*), si ottiene $\hat{u} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \hat{u} * \hat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Verifichiamo infine la validità della formula (9).

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{u}(t) = (\hat{u} * \hat{\phi})(t) = \hat{u}(\tau_t \tilde{\hat{\phi}}) = u(\widehat{\tau_t \tilde{\hat{\phi}}}) = u\left(e^{-i\langle t,\cdot\rangle} \phi\right) = \phi u\left(e^{-i\langle t,\cdot\rangle}\right) = u\left(e^{-i\langle t,\cdot\rangle}\right).$$

$\square$

Concludiamo con un ultimo risultato, che riportiamo senza dimostrazione.

Proposizione 2.55 (Paley-Wiener). *Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)^*$, allora $\hat{u}$ si estende ad una funzione olomorfa intera.*

3 Applicazioni alle equazioni differenziali.

In questo paragrafo, vogliamo applicare la trasformata di Fourier allo studio di equazioni lineari a coefficienti costanti in tutto lo spazio. Cominciamo col considerare un semplice esempio, dato dall'equazione del calore:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u &= g \qquad \text{on } \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

con $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
Se applichiamo la trasformata di Fourier nella variabile $x \in \mathbb{R}^N$ ad entrambi i membri dell'equazione, otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ \hat{u} &= \hat{g} \qquad \text{on } \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\hat{u} = e^{-t|\xi|^2} \hat{g} \qquad t \geq 0.$$

Antitrasformando questa uguaglianza, si ha

$$u = \left(e^{-t|\xi|^2} \hat{g} \right)^{\check{}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} g * F, \tag{10}$$

dove $F(x,t) := \left(e^{-t|\xi|^2} \right)^{\check{}} (x)$ è data dall'espressione

$$F(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \xi, x \rangle - t|\xi|^2} \, d\xi = \frac{1}{(2t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

Tale funzione F è solitamente chiamata *nucleo* o *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. Dalla (10) otteniamo infine la rappresentazione

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \, dy \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

Vediamo ora come si può estendere questo metodo ad equazioni lineari più generali. Sia $P(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, un polinomio in N variabili a coefficienti complessi e supponiamo che $\deg(P) \geq 1$. Sia $P(D)$ l'operatore differenziale corrispondente, dove x_i è formalmente sostituito da D_{x_i}, e consideriamo l'equazione differenziale

$$P(D)u = v, \tag{11}$$

dove v è un'assegnata funzione o distribuzione. Una distribuzione E si dice *soluzione fondamentale* dell'equazione se verifica (11) con $v = \delta_0$. Il Teorema 3.2 mostra che una tale soluzione esiste sempre.
Data una soluzione fondamentale E possiamo esprimere la soluzione u di (11) come prodotto di convoluzione $u = E * v$, posto che tale pordotto abbia senso (ad esempio se v ha supporto compatto). Si ha infatti

$$P(D)E * v = \delta_0 * v = v.$$

Per poter dar senso al prodotto $E * v$ è importante avere una soluzione fondamentale E che abbia un buon comportamento all'infinito (anche se non è mai possibile ottenere E a supporto compatto).
Consideriamo nel seguito il toro $T^N \subset \mathbb{C}^N$ definito come

$$T^N := \left\{ \left(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_N}\right) : \ (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

Lemma 3.1. *Sia $P(z)$, $z \in \mathbb{C}^N$, un polinomio di grado N, allora esiste una costante $A > 0$, dipendente solo da P, tale che per ogni funzione intera $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$, per ogni $z \in \mathbb{C}^N$ e per ogni $r > 0$ si abbia*

$$|f(z)| \leq \frac{A}{(2\pi r)^N} \int_{T^N} |fP|(z + rw)\ dw.$$

Dimostrazione. Fissiamo $z \in \mathbb{C}^N$ e $w \in T^N$ e siano

$$F(\lambda) = f(z + r\lambda w) \quad Q(\lambda) = P(z + r\lambda w) \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Osserviamo che $Q(\lambda) = c\Pi_{i=1}^N(\lambda + a_i)$, con $a_i \in \mathbb{C}$ e $c = r^N P_N(w)$, dove P_N è la componente omogenea di grado N di P. Si ha quindi, posto $\widetilde{Q}(\lambda) = c\Pi_{i=1}^N(1 + \overline{a_i}\lambda)$

$$|c|\ |f(z)| = |F(0)\widetilde{Q}(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(z + re^{i\theta}w)|\ |\widetilde{Q}(e^{i\theta})|\ d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |fP|(z + re^{i\theta}w)|\ d\theta.$$

Integrando ulteriormente su T^N otteniamo

$$|f(z)| \leq \frac{A}{2\pi(2\pi r)^N}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{T^N} |fP|(z + re^{i\theta}w)\ dwd\theta,$$

da cui si ottiene la tesi mediante il cambio di variabile $\tilde{w} = e^{i\theta}w$ e ponendo

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{T^N} |P_N|\ dw.$$

□

Il seguente risultato mostra che una soluzione fondamentale dell'equazione (11) esiste sempre.

Teorema 3.2 (Malgrange–Ehrenpreis). *Sia P un polinimio in $\mathbb{C}^N$ di grado N, allora esiste una soluzione fondamentale E dell'equazione (11) tale che*

$$|E(\psi)| \leq \frac{A}{(2\pi\sqrt{2\pi}r)^N}\int_{T^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\psi}(t + rw)|\ dtdw. \tag{12}$$

per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ e per ogni $r > 0$.

Dimostrazione. Dato $r > 0$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ definiamo

$$\|\psi\|_r := \frac{1}{(2\pi\sqrt{2\pi})^N}\int_{T^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\psi}|(t + rw)\ dtdw = \frac{1}{(2\pi\sqrt{2\pi})^N}\int_{T^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{e^{-ir\langle w,x\rangle}\psi(x)}|(t)\ dtdw.$$

Osserviamo che si ha

$$\lim_{j\to\infty} \|\psi_j\|_r = 0, \tag{13}$$

per ogni successione $\psi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Poiché infatti le funzioni ψ_j hanno tutte supporto contenuto in uno stesso compatto K, per ogni multiindice α si ha

$$\|D^\alpha(e^{-ir\langle w,x\rangle}\psi_j(x))\|_{L^\infty} \le C(K,\alpha) \max_{\beta\le\alpha} \|D^\beta\psi_j(x))\|_{L^\infty},$$

dove il membro destro tende a 0 per $j \to \infty$. Pertanto, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice j_0 tale che

$$\|(\mathrm{Id} - \Delta)^N (e^{-ir\langle w,x\rangle}\psi_j(x))\|_{L^2} < \epsilon$$

per ogni $j \ge j_0$ e per ogni $w \in T^N$. Per il Teorema 2.50, si ha quindi

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} |(1+|t|^2)^N \hat{\psi}_j(t+rw)|^2 \; dt < \epsilon^2,$$

per ogni $j \ge j_0$, da cui segue

$$\begin{aligned} \|\psi_j\|_r &\le \max_{w\in T^N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\psi}|(t+rw)\; dt \\ &\le \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \max_{w\in T^N} \left\| \frac{1}{(1+|t|^2)^N} \right\|_{L^2} \|(1+|t|^2)^N \hat{\psi}_j(t+rw)\|_{L^2} \le C\epsilon, \end{aligned}$$

per qualche $C = C(N) > 0$.
Sia ora $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ e sia $\psi := P(D)\phi$. Poiché ψ determina ϕ univocamente, si ha che $\delta_0(\phi) = \phi(0)$ definisce un funzionale lineare su ψ, dove ψ appartiene all'immagine di $P(D)$. Verifichiamo che tale funzionale è continuo ed esiste quindi (per il Teorema di Hahn-Banach) una distribuzione $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ tale che $\Lambda(P(D)\phi) = \phi(0)$. Data una tale distribuzione Λ e definendo $E(\psi) := \Lambda(\tilde{\psi})$ si ha infatti

$$(P(D)E)(\phi) = E(P(-D)\phi) = \Lambda(P(D)\tilde{\phi}) = \phi(0) = \delta_0(\phi)$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, cioè E è la soluzione fondamentale cercata.
Grazie alla Proposizione 2.55, la funzione $\hat{\psi}$ è la restrizione di una funzione intera, pertanto dal Lemma 3.1, applicato con $f = \hat{\phi}$, si ottiene

$$|\hat{\phi}(t)| \le \frac{A}{(2\pi r)^N} \int_{T^N} |\hat{\psi}(t+rw)| \; dw,$$

e quindi

$$|\phi(0)| = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\phi}(t)\; dt \right| \le \frac{A}{(2\pi\sqrt{2\pi} r)^N} \int_{T^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\psi}(t+rw)| \; dtdw = \frac{A}{r^N} \|P(D)\phi\|_r,$$

che, grazie alla (13), dimostra la tesi. Sempre il Teorema di Hahn-Banach ci garantisce inoltre che

$$|E(\phi)| = |\Lambda(\tilde{\phi})| \le \frac{A}{r^N} \|\phi\|_r,$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Osservazione 3.3. *Osserviamo che se* $1/P \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$, *allora* $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)^*$ *e vale la semplice espressione*

$$E = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{1}{P(i\xi)} \right)^{\vee}.$$

4 Soluzioni analitiche di equazioni quasilineari.

Siamo interessati a cercare soluzioni della seguente equazione quasilineare di ordine $k \in \mathbb{N}$ in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, \ldots, D^\beta u) D^\alpha u + a_0(x, u, \ldots, D^\beta u) = 0, \tag{14}$$

dove β è un generico multiindice con $|\beta| < k$, conoscendo il valore di u su un'ipersuperficie regolare $\Gamma \subset \Omega$.
L'idea è quella di esprimere la soluzione u come serie di Taylor centrata in un punto $x_0 \in \Gamma$, calcolando tutte le derivate di u in x_0 a partire da $u|_\Gamma$ ed usando l'equazione (14). Indicheremo con ν una scelta del vettore normale unitario a Γ.

Definizione 4.1. *Diremo che l'ipersuperficie* Γ *è* noncaratteristica *per l'equazione (14) se*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, \ldots) \nu^\alpha(x) \neq 0,$$

per ogni $x \in \Gamma$ *e per ogni possibile valore di* $a_\alpha(x, \ldots)$.

Teorema 4.2. *Supponiamo che* u *sia una soluzione regolare di (14) e che esistano* k *funzioni regolari* $g_1, \ldots, g_k$, $g_i : \Gamma \to \mathbb{R}$, *tali che*

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = g_j, \qquad 1 \leq j \leq k.$$

Allora, scelto $x_0 \in \Gamma$, *è possibile calcolare tutte le derivate di* u *in* x_0 *a partire dalle derivate delle* g_i *e dalle funzioni* a_α, a_0.

Dimostrazione. Supponiamo che $\Gamma = \{x_N = 0\}$. Poiché Γ è noncaratteristica, si ha $a_{(0,\ldots k)} \neq 0$. Osserviamo che tutte le derivate di u di ordine minore o uguale di k, eccetto $\frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}$, si ottengono derivando le funzioni g_i. Per quanto riguarda $\frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}$, utilizzando l'equazione otteniamo

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_N^k} = -\frac{1}{a_{(0,\ldots k)}} \left(\sum_{|\alpha|=k, \alpha \neq (0,\ldots k)} a_\alpha D^\alpha u + a_0 \right).$$

A questo punto, possiamo calcolare tutte le derivate di ordine $k+1$ eccetto $\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_N^{k+1}}$. Per quanto riguarda quest'ultima derivata, analogamente a quanto fatto in precedenza possiamo ricavarla differenziando l'equazione (14) rispetto a x_N e valutando l'espressione ottenuta in x_0. La tesi segue per induzione.
Supponiamo ora che Γ sia una generica ipersuperficie noncaratteristica e sia $x_0 \in \Gamma$. Sia $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un diffeomorfismo tale che $\Phi(\Gamma \cap B_r(x_0)) \subset \{y_N = 0\}$ per qualche $r > 0$. Detta $v(y) := u(\Phi^{-1}(y))$, si ha che v verifica un'equazione del tipo

$$\sum_{|\alpha|=k} b_\alpha D^\alpha v + b_0 = 0,$$

con

$$b_{(0,\dots k)} = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (D\Phi^N)^\alpha \neq 0 \qquad su\ \{y_N = 0\},$$

ricordando che $D\Phi^N$ è parallelo a ν. Possiamo ora concludere per quanto detto in precedenza.

$\square$

4.1 Il teorema di Cauchy–Kovalevskaya.

Supporremo nel seguito che tutti i dati del problema (cioè l'ipersuperficie Γ e le funzioni $u|_\Gamma$, a_α, a_0) siano analitici. In questo caso si può scegliere un diffeomorfismo Φ analitico in un intorno di $x_0 \in \Gamma$ e possiamo quindi supporre $\Gamma \cap B_r(x_0) \subset \{x_N = 0\}$. Eventualmente sottraendo ad u una funzione analitica, possiamo inoltre supporre $g_1 = \ldots = g_{k-1} = 0$ su Γ. Trasformiamo ora l'equazione (14) in un sistema del primo ordine, considerando ogni derivata parziale di u di ordine minore di k come una funzione indipendente. Effettuando il cambio di variabile

$$v := \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_N^{k-1}} \right) \in \mathbb{R}^M,$$

abbiamo che v verifica un'equazione del tipo

$$v_M = \sum_{j=1}^{M-1} B_j(v,x) v_j + c(v,x), \tag{15}$$

con la condizione $v = 0$ su $\{x_N = 0\} \cap B_r(x_0)$, dove $B_j : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{M}^{M\times M}$ e $c : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^M$ sono funzioni analitiche assegnate.
Osserviamo che una soluzione analitica dell'equazione (15) in un intorno di x_0 fornisce una soluzione analitica dell'equazione (14) in un intorno di $\Phi^{-1}(x_0)$.
Osserviamo che, introducendo se necessario una nuova funzione $v^{M+1} := x_N$, possiamo supporre che B_j e c non dipendano da x_N.

Teorema 4.3 (Cauchy-Kovalevskaia). *Nelle ipotesi precedenti esiste $r > 0$ ed una funzione analitica*

$$v = \sum_\alpha v_\alpha (x - x_0)^\alpha$$

che risolve il sistema (15).

Dimostrazione. Per la dimostrazione rimandiamo al libro di L. Evans *Partial Differential Equations*, paragrafo 4.6.
Si tratta di calcolare i coefficienti

$$v_\alpha = \frac{D^\alpha v(x_0)}{\alpha!}$$

in funzione di B_j e c, e mostrare che la serie ottenuta converge in un intorno di x_0. $\square$

5 Cenni di calcolo delle variazioni.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con $\partial\Omega$ di classe C^1 e sia $L : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Consideriamo il funzionale $F : W^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito come segue

$$F[u] := \int_\Omega L(x, u, \nabla u)\ dx \qquad u \in W^{1,q}(\Omega).$$

Ci chiediamo sotto quali ipotesi su L il funzionale F sia debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente (scriveremo per brevità d.s.c.i.) in $W^{1,q}(\Omega)$.

Teorema 5.1. *Supponiamo $L \geq 0$ e che $L(x, z, \cdot)$ sia una funzione convessa per ogni $(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Allora F è d.s.c.i. in $W^{1,q}(\Omega)$ (quando $q = \infty$ il funzionale F è s.c.i. anche per la topologia debole*).*

Dimostrazione. Siano $u_k, u \in W^{1,q}(\Omega)$ con $u_k \rightharpoonup u$ e sia $l := \liminf_k F[u_k]$. Vogliamo dimostrare che $F[u] \leq l$. Passando ad una sottosuccessione possiamo supporre $l = \lim_k F[u_k]$, inoltre, grazie al Teorema 2.42, possiamo anche supporre $u_k \to u$ in $L^q(\Omega)$ e quasi ovunque. Dal Teorema di Egoroff segue quindi che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme $E_\epsilon \subset \Omega$ tale che $|\Omega \setminus E_\epsilon| \leq \epsilon$ e $u_k \to u$ uniformemente in E_ϵ. Siano ora

$$\Omega_\epsilon := \left\{ x \in \Omega : \ |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\epsilon} \right\}, \qquad G_\epsilon := E_\epsilon \cap \Omega_\epsilon.$$

Si ha $|\Omega \setminus E_\epsilon| \to 0$ in ϵ, inoltre

$$F[u_k] \geq \int_{G_\epsilon} L(x, u_k, \nabla u_k)\ dx \geq \int_{G_\epsilon} \Big(L(x, u_k, \nabla u) + \nabla_p L(x, u_k, \nabla u) \cdot (\nabla u_k - \nabla u) \Big)\ dx.$$

Poiché L è di classe C^1, $u_k \to u$ uniformemente in G_ϵ e $\nabla_k u \rightharpoonup \nabla u$ in $L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$, otteniamo

$$\lim_k \int_{G_\epsilon} L(x, u_k, \nabla u)\ dx = \int_{G_\epsilon} L(x, u, \nabla u)\ dx$$

e

$$\lim_k \int_{G_\epsilon} \nabla_p L(x, u_k, \nabla u) \cdot (\nabla u_k - \nabla u)\ dx = 0,$$

cioè

$$l = \lim_k F[u_k] \geq \int_{G_\epsilon} L(x, u, \nabla u)\ dx.$$

La tesi segue facendo tendere $\epsilon \to 0$. □

Grazie a questo teorema, possiamo dimostrare un risultato generale di esistenza di minimi di F su opportuni sottoinsiemi di $W^{1,q}(\Omega)$.

Teorema 5.2. *Sia $q > 1$ e supponiamo che $L(x, z, \cdot)$ sia una funzione convessa per ogni $(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}$ e che esistano due costanti $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, tali che*

$$L(x, z, p) \geq a|p|^q - b \qquad \forall (x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}. \tag{16}$$

Allora, per ogni $g \in L^q(\partial\Omega)$, esiste un minimo u_g di F in

$$\mathcal{A}_g := \{u \in W^{1,q}(\Omega) : \ u|_{\partial\Omega} = g\}.$$

Dimostrazione. Sia $g \in L^q(\partial\Omega)$ e $m := \inf_{\mathcal{A}_g} F < +\infty$. Scegliamo una successione minimizzante $u_k \in \mathcal{A}_g$ tale che $\lim_k F[u_k] = m$. La condizione (16) implica $\sup_k \|\nabla u_k\|_{L^q} < +\infty$, pertanto per la disuguaglianza di Poincaré (applicata a $u_k - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$, dove $w \in \mathcal{A}_g$ è una funzione fissata) anche $\sup_k \|u_k\|_{L^q} < +\infty$, cioè u_k è una successione limitata in $W^{1,q}(\Omega)$ e quindi ammette una sottosuccessione (che chiameremo sempre u_k) debolmente* convergente ad una funzione $u \in W^{1,q}(\Omega)$. Per il Teorema 5.1, l'unica cosa che resta da verificare è $u \in \mathcal{A}_g$. Se $q < +\infty$ questo segue osservando che $u_k - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e $W_0^{1,q}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso (e quindi debolmente chiuso) di $W^{1,q}(\Omega)$, se $q = +\infty$ questo segue dal fatto che le u_k convergono ad u uniformemente. Pertanto $u - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$, cioè $u \in \mathcal{A}_g$. $\square$

Osserviamo che se la funzione $(z,p) \to F(x,z,p)$ è strettamente convessa per ogni $x \in \Omega$, si ha

$$F\left[\frac{u_1 + u_2}{2}\right] < \frac{F[u_1] + F[u_2]}{2}$$

per ogni $u_1 \neq u_2 \in W^{1,q}(\Omega)$. Pertanto, i minimi descritti nel Teorema 5.2 sono unici.
Ci chiediamo ora quale sia la relazione tra la funzione trovata u_g e l'equazione di Eulero di F su $\mathcal{A}_g$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} L_{p_i}(x,u,\nabla u) - L_z(x,u,\nabla u) &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{su } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{17}$$

Definizione 5.3. *Una funzione $u \in \mathcal{A}_g$ si dice* soluzione debole *di (17) se*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} L_{p_i}(x,u,\nabla u) v_{x_i} + L_z(x,u,\nabla u) v \; dx = 0$$

per ogni $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Differenziando F e passando (quando possibile) la derivata sotto il segno di integrale otteniamo il seguente risultato.

Teorema 5.4. *Supponiamo che L verifichi le seguenti condizioni di crescita*

$$|L(x,z,p)| \le C(1 + |z|^q + |p|^q), \quad |L_z(x,z,p)| + |L_p(x,z,p)| \le C(1 + |z|^{q-1} + |p|^{q-1}), \tag{18}$$

per qualche costante $C > 0$. Allora la funzione u_g è una soluzione debole dell'equazione (17).

Osserviamo che non tutte le soluzioni di (17) sono minimi del funzionale F, anche se questo succede quando la funzione $(z,p) \to F(x,z,p)$ è convessa. Analizzeremo quindi qualche tecnica per identificare i punti critici di F (cioè le soluzioni deboli di (17)), che non sono minimi.
Generalizziamo ora la nozione di funzione di classe C^1 a funzioni definite su un generico spazio di Banach B.

Definizione 5.5. *Data $F : B \to \mathbb{R}$, diremo che F è* differenziabile *(nel senso di Fréchet) in $x_0 \in B$ se esiste $\Lambda \in B^*$ tale che*

$$F[x] = F[x_0] + \Lambda[x - x_0] + o(\|x - x_0\|) \qquad x \in B.$$

Porremo, in questo caso, $\nabla F[x_0] := \Lambda$. Osserviamo che F è continua in tutti i punti in cui è differenziabile.
Diremo che la funzione F è di classe C^1 se è differenziabile in tutti i punti di B e l'applicazione $\nabla F : B \to B^*$ è continua.

Se F è di classe C^1, diremo che x_0 è un punto critico di F se $\nabla F[x_0] = 0$, diremo inoltre che $c \in \mathbb{R}$ è un valore critico di F se $c = F[x_0]$ per qualche x_0 punto critico di F. Osserviamo che se x_0 è un minimo per F in particolare è anche un punto critico.

Proposizione 5.6. *Supponiamo che L sia di classe C^1 e che verifichi le condizioni di crescita (18), allora il funzionale F è di classe C^1 su $W^{1,q}(\Omega)$ e si ha*

$$\nabla F[u](v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N L_{p_i}(x, u, \nabla u) v_{x_i} + L_z(x, u, \nabla u) v \; dx \qquad v \in W^{1,q}(\Omega).$$