

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

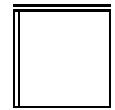
Ing. dell'Energia

A.A. 2008/2009, 3 Luglio 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA: SQUADRA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---



ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\exp\left(\frac{1}{2n^2}\right) - \sqrt{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right).$$

(Si ricordi lo sviluppo asintotico $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16}$ per $y \rightarrow 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico di $\exp\left(\frac{1}{2n^2}\right) - \sqrt{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$:

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \ln x |1 + \ln x|.$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

- (vi) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1 + (\ln x)^2)}$$

esplicitando i passaggi principali ed i metodi di risoluzione utilizzati.

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{1 + y}{1 + x^2}. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare se esiste una soluzione $x \mapsto \psi(x)$ dell'equazione completa (1) che soddisfa la condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 1.$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) = (y - x) e^{-(x^2 + y^2)}.$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f_x(x, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

e determinare eventuali punti critici di f :

- (iii) Calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinare la natura dei punti critici di f .

- (iv) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, -e^{-1})$: