COGNOME:	*NOME*:	*MATR.*:

ANALISI REALE E COMPLESSA 4^o **appello — 18/9/2012**
Facoltà di Ingegneria, Area dell'Informazione

E.1) Dire se la successione di funzioni

$$f_n(x) = \cos(x + nx)$$

è convergente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e, nel caso, calcolarne il limite.

E.2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |x| \le 1 \\ 1 & \text{se } 1 < |x| \le \pi \end{cases}$$

calcolare la serie di Fourier della prolungata 2π-periodica di f.

E.3) Calcolare, applicando il Teorema dei Residui, la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{x^2 + i}.$$

E.4) Classificare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2} \qquad z \in \mathbb{C}$$

e calcolare i residui di f in tali punti.
Dedurne il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\,.$$

SOLUZIONI

E.1) Data $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \phi f_n\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\cos(x+nx)\,dx\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\cos(x)\cos(nx)\,dx - \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\sin(x)\sin(nx)\,dx = 0\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\phi(x)\cos(x)$, $\phi(x)\sin(x)$ appartengono a $L^1(\mathbb{R})$.

E.2) Essendo la funzione pari e regolare a tratti, possiamo esprimerla con la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi - \frac{2}{3}\right)\\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(k)}{k^2} - \frac{\sin(k)}{k^3}\right).\end{aligned}$$

E.3) Se poniamo

$$\phi_\lambda(z) = \frac{e^{-i(1-\lambda)z}}{z^2+i},$$

grazie al Teorema dei Residui, si ha

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\lambda(x)\,dx = \begin{cases} 2\pi i\,\mathrm{res}(\phi_\lambda, -e^{-i\pi/4}) & \text{se } 1-\lambda > 0\\ \\ -2\pi i\,\mathrm{res}(\phi_\lambda, e^{-i\pi/4}) & \text{se } 1-\lambda < 0.\end{cases}$$

Osservando che ϕ_λ ha due poli semplici in $z = \pm e^{-i\pi/4}$ con

$$\begin{aligned}\mathrm{res}(\phi_\lambda, e^{-i\pi/4}) &= \lim_{z\to e^{-i\pi/4}} (z - e^{-i\pi/4})\phi_\lambda(z) = \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\lambda)(1-i)} e^{i\pi/4}\\ \mathrm{res}(\phi_\lambda, -e^{-i\pi/4}) &= \lim_{z\to -e^{-i\pi/4}} (z + e^{-i\pi/4})\phi_\lambda(z) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\lambda)(1-i)} e^{i\pi/4},\end{aligned}$$

otteniamo

$$\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} -\pi i e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\lambda)(1-i)} e^{i\pi/4} & \text{se } 1-\lambda \geq 0\\ \\ -\pi i e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\lambda)(1-i)} e^{i\pi/4} & \text{se } 1-\lambda < 0.\end{cases}$$

E.4) La funzione f ha due poli di ordine due in $z = \pm 2i$ e si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{res}(f, 2i) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^2}{(z+2i)^2}\Big|_{z=2i} = \frac{4iz}{(z+2i)^3}\Big|_{z=2i} = -\frac{i}{8}\\ \mathrm{res}(f, -2i) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^2}{(z-2i)^2}\Big|_{z=-2i} = -\frac{4iz}{(z-2i)^3}\Big|_{z=-2i} = \frac{i}{8}.\end{aligned}$$

Per il Teorema dei Residui si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\ \mathrm{res}(f, 2i) = \frac{\pi}{4}.$$