Correzioni prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

del 14 gennaio 2014

E.1 Dato $r > 0$, sia $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < r\}$ e sia $T : H^1_0(B_r) \to \mathbb{R}$ l'operatore

$$T(f) = \int_{B_r} (f + x \cdot \nabla f)\, dx \qquad f \in H^1_0(B_r).$$

Mostrare che T è un operatore lineare e continuo, e calcolarne la norma.

SOLUZIONE. La linearità di T segue dalla linearità dell'integrale. Dal Teorema della divergenza si ottiene

$$\int_{B_r} f = -\int_{B_r} \frac{x}{n} \cdot \nabla f$$

per ogni $f \in H^1_0(B_r)$. Quindi, ponendo $g(x) = (|x^2| - r^2)/2 \in H^1_0(B_r)$, si ha

$$|T(f)| = \frac{n-1}{n} \left| \int_{B_r} x \cdot \nabla f \right| = \frac{n-1}{n} \left| \int_{B_r} \nabla g \cdot \nabla f \right|.$$

Questo mostra che T è un operatore continuo di norma

$$\|T\|_{H^{-1}(B_r)} = \frac{n-1}{n} \|x\|_{L^2(B_r)} = (n-1) \sqrt{\frac{\omega_n}{n(n+2)}}\, r^{\frac{n}{2}+1}.$$

E.2 Sia $I = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ e sia $T : D(T) \to L^2(I)$ l'operatore differenziale $T(u) = -u'' + u$ con dominio $D(T) = \{u \in H^2(I) : \ u'(-1) = u(-1), \ u'(1) = -u(1)\}$.

i) Mostrare che T è un operatore chiuso.

ii) Mostrare che T è autoaggiunto e definito positivo.

iii) Mostrare che T è bigettivo.

iv) Mostrare che T^{-1} è compatto come operatore da $L^2(I)$ in $L^2(I)$.

v) Determinare lo spettro di T.

SOLUZIONE.

i) Sia $u_n \in D(T)$, con $u_n \to u$ e $T(u_n) \to v$ in $L^2(I)$. Dalla disuguaglianza

$$\langle T(u_n), u_n \rangle_{L^2} = \int_I (-u_n'' + u_n) u_n \, dx = \int_I (u_n')^2 + u_n^2 \, dx + u_n(-1)^2 + u_n(-1)^2 \geq \|u_n\|^2_{H^1(I)}$$

otteniamo $\|u_n\|_{H^1(I)} \leq \|T(u_n)\|_{L^2}$, da cui segue $u \in H^1(I)$ e $\|u\|_{H^1(I)} \leq \|v\|_{L^2}$. Per l'immersione compatta di $H^1(I)$ in $C^0(\bar{I})$, si ha che u_n converge ad u, a meno di sottosuccessione, uniformemente nell'intervallo I.

Passando al limite nell'uguaglianza

$$\begin{aligned} u_n(x) &= u_n(-1) + \int_{-1}^{x} u_n'(t)\, dt \\ &= u_n(-1)(x+2) + \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{t} u_n''(s)\, ds dt, \end{aligned}$$

otteniamo

$$u(x) = u(-1)(x+2) + \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{t} (u(s) - v(s))\, ds dt,$$

che implica $u \in H^2(I)$, $u'' = u - v$ e $u(-1) = u'(-1)$. Analogamente si ottiene il vincolo $u(1) = -u'(1)$. Si ha quindi $u \in D(T)$ e $T(u) = v$, cioè T è chiuso.

ii) Si ha

$$\langle T(u), v\rangle_{L^2} = \int_I (-u'' + u)v\, dx = \int_I (u'v' + uv)\, dx + u(-1)v(-1) + u(1)v(1) = \langle u, T(v)\rangle_{L^2}.$$

In particolare

$$\langle T(u), u\rangle_{L^2} = \int_I (u'^2 + u^2)\, dx + u(-1)^2 + u(1)^2 \geq 0, \tag{0.1}$$ Tpos

cioè T è autoaggiunto e definito positivo.

iii) L'iniettività di T segue da (0.1). La suriettività di T segue dal Teorema di Lax-Milgram, applicato alla forma bilineare positiva su $H^1(I)$ definita da

$$a(u, v) = \int_I (u'v' + uv)\, dx + u(-1)v(-1) + u(1)v(1).$$

(In alternativa si potevano usare i risultati che legano nucleo di A ed immagine di A^* e viceversa).

iv) Poiché T è bigettivo è ben definito l'operatore inverso $T^{-1} : L^2(I) \to L^2(I)$. Da (0.1) segue che $\|u\|_{H^1(I)} \leq \|T(u)\|_{L^2(I)}$, cioè $\|T^{-1}(v)\|_{H^1(I)} \leq \|v\|_{L^2(I)}$. A questo punto, la compattezza di T^{-1} segue dall'immersione compatta di $H^1(I)$ in $L^2(I)$.

v) Poiché T è autoaggiunto, definito positivo, con inverso compatto, per il Teorema di decomposizione spettrale lo spettro $\sigma(T)$ è composto da una successione di autovalori $\lambda_n > 0$ con $\lim_n \lambda_n = +\infty$.

Per determinare tali autovalori dobbiamo risolvere l'equazione $-u'' = (\lambda - 1)u$, con condizioni al bordo $u'(-1) = u(-1)$, $u'(1) = -u(1)$. Osserviamo che da (0.1) segue $\lambda > 1$ e quindi la soluzione è del tipo

$$u(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x) \qquad \mu = \sqrt{\lambda - 1}.$$

Imponendo le condizioni al bordo si ottiene che l'equazione è risolubile se e solo se $\tan(\mu) \in \{1/\mu, -\mu\}$, che definisce la successione di autovalori λ_n.

E.3

Sia X uno spazio di Banach e siano Y, Z sottospazi chiusi non banali di X tali che $Y + Z = X$ e $Y \cap Z = \{0\}$. Per $T \in X'$ denotiamo le norme del funzionale T, ristretto rispettivamente a Y ed a Z, con

$$\|T\|_{Y'} := \sup_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{T(y)}{\|y\|} \qquad \|T\|_{Z'} := \sup_{z \in Z \setminus \{0\}} \frac{T(z)}{\|z\|}.$$

i) Mostrare che esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che per ogni $T \in X'$ si ha

$$C_1(\|T\|_{Y'} + \|T\|_{Z'}) \leq \|T\| \leq C_2(\|T\|_{Y'} + \|T\|_{Z'}) \qquad (*)$$

ii) Mostrare che la costante C_1 può essere scelta indipendentemente da X, Y, Z e determinarne il valore massimo.

iii) Dire se si può scegliere C_2 indipendentemente da X, Y, Z.

SOLUZIONE.

i) Poiché $\|T\|_{Y'} \leq \|T\|$ e $\|T\|_{Z'} \leq \|T\|$, si ha subito che $C_1 = 1/2$ verifica $(*)$.

Consideriamo ora sul prodotto cartesiano $Y \times Z$ la norma $\|y+z\|_1 = \|y\| + \|z\|$. Dato che Y, Z sono sottospazi chiusi si ha che $Y \times Z$ è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_1$. Consideriamo l'operatore $J : Y \times Z \to X$ definito da $J(y, z) = y + z$. J è lineare, iniettivo (grazie all'ipotesi $Y \cap Z = \{0\}$), surgettivo (grazie all'ipotesi $Y + Z = X$) e continuo. La continuità segue dalla maggiorazione

$$\|J(y, z)\| = \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| = \|(y, z)\|_1.$$

Per il Teorema dell'applicazione aperta (Corollario 2.7 del Brezis), esiste $c > 0$ tale che

$$c\|(y, z)\|_1 \leq \|J(y, z)\| = \|y + z\|,$$

ossia $\|y\| + \|z\| \leq (1/c)\|y + z\|$. (E' equivalente ad usare l'esistenza dell'operatore continuo di proiezione su ogni sottospazio vista a lezione).

Preso ora $x \in X \setminus \{0\}$ e $(y, z) \in Y \times Z$ tali che $x = y + z$, si ha

$$\frac{T(x)}{\|x\|} = \frac{T(y)}{\|y+z\|} + \frac{T(z)}{\|y+z\|} \leq \|T\|_{Y'}\frac{\|y\|}{\|y+z\|} + \|T\|_{Z'}\frac{\|z\|}{\|y+z\|} \leq \frac{1}{c}(\|T\|_{Y'} + \|T\|_{Z'})$$

da cui segue che $C_2 = 1/c$ verifica $(*)$.

ii) Dal punto precedente si ha che la costante C_1 ottimale è maggiore o uguale a $1/2$. Verifichiamo che $1/2$ è il valore massimo possibile, esibendo X, Y, Z, T per cui vale l'uguaglianza. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|x\| := |x_1| + |x_2|$, Y lo span di $e_1 = (1, 0)$ e Z lo span di $e_2 = (0, 1)$. L'applicazione $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ verifica $\|T\| = 1, \|T\|_{Y'} = 1, \|T\|_{Z'} = 1$.

iii) Non esiste una costante C_2 indipendente da X, Y, Z. Infatti, preso $X = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidea e $k \in \mathbb{N}$, siano Y lo span di $(1/k)e_1 + e_2 = (1/k, 1)$ e Z lo span di e_2. L'applicazione $T(x_1, x_2) = x_1$ verifica $\|T\| = 1, \|T\|_{Y'} = 1/\sqrt{k^2+1}, \|T\|_{Z'} = 0$, da cui segue $C_2 \geq \sqrt{k^2+1}$.