Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

12 luglio 2016

Esercizio 1. Siano p, $q \in (1, +\infty)$ tali che $1/p + 1/q = 1$ e sia a_{ij} una successione a due indici tale che $\sum_{i,j} |a_{ij}|^q < +\infty$. Dato $x \in \ell^p$ sia

$$T(x)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \qquad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

i) Mostrare che $T \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$.

ii) Determinare l'operatore aggiunto T^*.

iii) Mostrare che $T \in \mathcal{K}(\ell^p, \ell^q)$.

Esercizio 2. Sia $(H, |\cdot|)$ uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$.

i) Mostrare che, se

$$\inf \{|\lambda h - T(h)| \,:\, |h| = 1\} = 0 \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbb{R},$$

allora $\lambda \in \sigma(T)$.

ii) Supponiamo che T sia compatto. Mostrare che $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un autovalore di T se e solo se

$$\inf \{|\lambda h - T(h)| \,:\, |h| = 1\} = 0.$$

iii) Supponiamo che T sia compatto e autoaggiunto, e siano λ_1, λ_2, ..., λ_n, ... gli autovalori distinti non nulli di T. Sia P_n, $n \geq 1$, la proiezione ortogonale sull'autospazio $\ker(\lambda_n I - T)$. Provare che la serie $\sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n$ converge a T in $\mathcal{L}(H)$.

Esercizio 3. Si consideri l'operatore

$$T(u) = u(0) \qquad u \in H_0^1(-1, 1).$$

i) Mostrare che T è lineare e continuo.

ii) Calcolare la norma di T.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

i) Dato $x \in \ell^p$, applicando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$|T(x)_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell^p} \qquad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Da questa disuguaglianza si ottiene subito la stima

$$\|T(x)\|_{\ell^q} \leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell^p}$$

e quindi $T \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$ con $\|T\| \leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}}$.

iii) Poiché $T \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$, sappiamo che $T^* \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$. Dalla definizione di aggiunto, segue subito che

$$T^*(x)_j := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_i, \qquad j \in \mathbb{N},$$

per ogni $x \in \ell^p$.

iii) Mostriamo ora che T è compatto. Per ogni $N \in \mathbb{N}$, sia $T_N \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$ l'operatore definito da $T_N(x)_i = T(x)_i$ se $i \leq N$ e $T_N(x)_i = 0$ se $i > N$.

Osserviamo che T_N ha rango finito e che

$$\|T(x) - T_N(x)\|_{\ell^q} = \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell^p}$$

per ogni $x \in \ell^p$. In particolare, otteniamo che

$$\|T - T_N\| \leq \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \qquad \text{per } N \to +\infty\,,$$

cioè T è limite di operatori di rango finito ed è quindi compatto.

Soluzione esercizio 2.

i) Supponiamo $\lambda \in \rho(T)$. In tal caso, l'operatore $\lambda I - T$ è invertibile e si ha $h = (\lambda I - T)^{-1}(\lambda h - T(h))$ per ogni $h \in H$. In particolare, se $|h| = 1$ otteniamo che

$$1 = |h| \leq \|(\lambda I - T)^{-1}\| \, |\lambda h - T(h)|$$

e quindi

$$\inf \left\{ |\lambda h - T(h)| \,:\, |h| = 1 \right\} \geq \frac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|} > 0.$$

ii) Se $\inf \{|\lambda h - T(h)| \,:\, |h| = 1\} = 0$ dal punto precedente sappiamo che $\lambda \in \sigma(T)$, quindi, se T è compatto e $\lambda \neq 0$, abbiamo che λ è un autovalore di T.
Viceversa, se $\lambda \neq 0$ è un autovalore di T, esiste $h \in H$ tale che $|h| = 1$ e $T(h) = \lambda h$, da cui segue che

$$\inf \{|\lambda h - T(h)| \,:\, |h| = 1\} = \min \{|\lambda h - T(h)| \,:\, |h| = 1\} = 0.$$

iii) Grazie al Teorema Spettrale sappiamo che

$$h = h_0 + \sum_{n\geq 1} P_n(h) \qquad \text{per ogni } h \in H,$$

dove h_0 è un elemento del nucleo di T. In particolare, applicando l'operatore T ad entrambi i membri della precedente uguaglianza, otteniamo che

$$T(h) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n P_n(h) \qquad \text{per ogni } h \in H.$$

La tesi segue quindi dal Teorema di Banach-Steinhaus.

Soluzione esercizio 3.

i) La linearità di T segue subito dalla definizione. Per verificare la limitatezza di T osserviamo che, per $u \in H_0^1(-1,1)$, possiamo scrivere

$$T(u) = u(0) = \int_{-1}^{0} u'(x)\,dx \leq \|u'\|_{L^2(-1,1)} = \|u\|_{H_0^1(-1,1)}\,,$$

da cui otteniamo che T è limitato con $\|T\| \leq 1$.

ii) Per calcolare la norma di T cerchiamo una funzione $v \in H_0^1(-1,1)$ tale che

$$T(u) = \langle u, v\rangle_{H_0^1(-1,1)} \qquad \text{per ogni } u \in H_0^1(-1,1).$$

Consideriamo la funzione $v \in H_0^1(-1,1)$ così definita:

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{2} & \text{se } x \in [-1,0], \\[2ex] \dfrac{1-x}{2} & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Per ogni $u \in H_0^1(-1,1)$ abbiamo

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(-1,1)} = \int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} u'(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} u'(x)\,dx = u(0) = T(u),$$

da cui otteniamo che $\|T\| = \|v\|_{H_0^1(-1,1)} = \sqrt{2}/2$.