Compito di Analisi Matematica 1

10 gennaio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(e^x-\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right),$$

al variare dei parametri $x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{|x|\to+\infty}|f(x)| = +\infty$. Mostrare che se J è un insieme limitato contenuto nell'immagine di f, allora la sua controimmagine $f^{-1}(J)$ è anch'essa limitata. Provare inoltre che, se f è continua e J è compatto, allora l'insieme $f^{-1}(J)$ è anch'esso compatto.

Esercizio 3. Studiare la convergenza semplice e assoluta dell'integrale

$$\int_0^\infty [\arctan(x)]^\alpha \left(\frac{\pi x}{2} - x\arctan(x) + \beta\right) dx\,,$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del problema ai limiti

$$\begin{aligned} &y''(x) + \alpha y'(x) + y(x) = \sin(x) \\ &y(0) = y(\pi) = 0\,, \end{aligned}$$

al variare del parametro reale α.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

Poiché
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y\,,$$
una condizione necessaria per la convergenza della serie è che si abbia $x = y$.

Osserviamo ora che per $x = y = 0$ la serie è identicamente nulla, quindi converge assolutamente, mentre per $x = y \neq 0$ abbiamo
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
e quindi
$$e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\left(1-e^{-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \frac{x^2\,e^x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Dal criterio di Leibniz segue che la serie converge semplicemente, ma non assolutamente, per $x = y \neq 0$.

Soluzione esercizio 2.

Se $I = f^{-1}(J)$ non è limitato, esiste una successione $x_n \in I$ tale che $|x_n| \to +\infty$. Dall'ipotesi su f sappiamo che $\frac{f(x_n)}{x_n} \to +\infty$ e quindi anche $|f(x_n)| \to +\infty$. Ma $f(x_n) \in J$, pertanto J non può essere limitato.

Supponiamo ora che f sia continua e J compatto. Vogliamo mostrare che anche I è compatto. Per far questo, prendiamo una successione $x_n \in I$. Da quanto detto prima, sappiamo che I è limitato e quindi $\bar{I}$ è compatto. Esiste quindi una sottosuccessione x_{n_k} di x_n e un punto $x \in \bar{I}$ tali che $x_{n_k} \to x$. Poiché $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \in J$, f è continua e J è chiuso, abbiamo che $f(x) = \lim_k f(x_{n_k}) \in J$ e quindi $x \in I$, cioè I è compatto.

Soluzione esercizio 3.

Osserviamo che per $x \to +\infty$ si ha
$$[\arctan(x)]^\alpha\left(\frac{\pi x}{2} - x\arctan(x) + \beta\right) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\left(1+\beta+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$
pertanto l'integrale converge in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\beta = -1$.

Per $x \to 0$ e $\beta = -1$ si ha invece
$$[\arctan(x)]^\alpha\left(\frac{\pi x}{2} - x\arctan(x) - 1\right) \sim -x^\alpha,$$
da cui segue che l'integrale converge se e solo se $\beta = -1$ e $\alpha > -1$.

Soluzione esercizio 4.

Per $|\alpha| > 2$ la soluzione generale dell'equazione è
$$y(x) = c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x} - \frac{1}{\alpha}\cos(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
dove
$$\lambda_\pm = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-4}}{2}\,.$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \frac{1}{\alpha} \\ e^{\lambda_+ \pi} c_1 + e^{\lambda_- \pi} c_2 &= -\frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

che ha sempre un'unica soluzione poiché $\lambda_+ \neq \lambda_-$.

Per $\alpha = \pm 2$ la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{\alpha}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{\alpha}{2}x} - \frac{1}{\alpha}\cos(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\alpha} \\ e^{-\frac{\alpha}{2}\pi} c_1 + \pi e^{-\frac{\alpha}{2}\pi} c_2 &= -\frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

che ha sempre un'unica soluzione.

Per $|\alpha| < 2$ con $\alpha \neq 0$ la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}\, x\right) + c_2 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}\, x\right) - \frac{1}{\alpha}\cos(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\alpha} \\ e^{-\frac{\alpha}{2}\pi} \cos\left(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}\, \pi\right) c_1 + e^{-\frac{\alpha}{2}\pi} \sin\left(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}\, \pi\right) c_2 &= -\frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

che ha sempre un'unica soluzione poiché $\sin\left(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}\, \pi\right) > 0$.

Infine, per $\alpha = 0$ la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_1 &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

che chiaramente non ha soluzione.

In conclusione, il problema ai limiti ha un'unica soluzione se $\alpha \neq 0$, mentre non ha soluzioni per $\alpha = 0$.