Compito di Analisi Matematica 2

5 luglio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Si consideri la curva planare

$$\gamma(t) = (1+\cos(t))\,(\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0, 2\pi).$$

(1) Dire quali punti del supporto di γ sono regolari. Specificare la natura degli eventuali punti singolari (punti angolosi, cuspidi).

(2) Calcolare

$$\int_\gamma \omega\,,$$

dove $\omega(x,y) = (\sin(y) - y)dx + x(\cos(y)+1)dy$.

Esercizio 2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}; [0,+\infty))$ e per ogni $r \geq 0$ sia $f_r : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ definita da $f_r := \min\{f, r\}$.

(1) Provare che $f_r \in L^1(\mathbb{R}; [0,r])$ per ogni $r \geq 0$.

(2) Posto $F(r) := \|f_r\|_{L^1}$ per ogni $r \geq 0$, dimostrare che F è una funzione monotona crescente.

(3) Provare che $\lim_{r\to+\infty} F(r) = \|f\|_{L^1}$.

Esercizio 3. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ sia $g^N : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definita da

$$g^N(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{N}) \cup [\frac{\pi}{N}, \pi) \\ 1 - \frac{N}{\pi}\,|x| & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}) \end{cases}$$

e sia $f^N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'estensione 2π-periodica di g^N.

(1) Determinare la serie di Fourier reale S_{f^N} di f^N per ogni $N \in \mathbb{N}$.
(2) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale di S_{f^N}.
(3) Dimostrare che

$$N = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\frac{k}{N}\pi)}{\left(\frac{k\pi}{N}\right)^2} \qquad \text{per ogni } N \in \mathbb{N}.$$

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

(1) Per $t \in [0, 2\pi)$, calcoliamo la derivata

$$\gamma'(t) = (-\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t), \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t)),$$

che si annulla se e solo se $t = \pi$, quindi la curva è regolare per $t \neq \pi$. Per $t = \pi$ la curva passa per l'origine ed ha un punto singolare di tipo cuspide, infatti il vettore tangente alla curva è dato da

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos(t))}}(-\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t), \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t)),$$

e si ha

$$\lim_{t \to \pi^-} T(t) = (1, 0), \qquad \lim_{t \to \pi^+} T(t) = (-1, 0).$$

(2) Notiamo che $\gamma(t)$ è una curva chiusa orientata positivamente (cardioide). Osserviamo inoltre che possiamo scrivere $\omega = \omega_1 + \omega_2$, con $\omega_1 = \sin(y)dx + x\cos(y)dy$ e $\omega_2 = -ydx + xdy$. Dato che $\omega_1 = df$, con $f(x, y) = x\sin(y)$, abbiamo che ω_1 è una forma esatta e quindi il suo integrale lungo γ è nullo. Di conseguenza otteniamo

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_2 = \int_0^{2\pi} \langle \omega_2(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos(t))^2 \, dt = 3\pi.$$

Soluzione esercizio 2.

(1) Poiché $f \geq 0$, anche $f_r \geq 0$ per ogni $r \geq 0$. Pertanto per ogni $r \geq 0$ si ha

$$\|f_r\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} f_r(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\{f<r\}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{f \geq r\}} r\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^1}.$$

(2) Siano ora $0 \leq r_1 < r_2$. Allora

$$\begin{aligned} F(r_2) - F(r_1) &= \int_{\{r_1 \leq f < r_2\}} f(x)\,\mathrm{d}x + r_2|\{f \geq r_2\}| - r_1|\{f \geq r_1\}| \\ &\geq r_1 \left(|\{r_1 \leq f < r_2\}| - |\{f \geq r_1\}|\right) + r_2|\{f \geq r_2\}| \\ &= (r_2 - r_1)|\{f \geq r_2\}| \geq 0\,. \end{aligned}$$

(3) Osserviamo che f_r è monotona crescente in r e che $f_r \to f$ per $r \to +\infty$. Essendo $f_r \geq 0$ per ogni $r \geq 0$, per il teorema di convergenza monotona, abbiamo che

$$\lim_{r \to +\infty} F(r) = \lim_{r \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_r(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{r \to +\infty} f_r(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \|f\|_{L^1}\,.$$

Soluzione esercizio 3.

(1) Sia $N \in \mathbb{N}$. La funzione g^N è pari, pertanto i coefficienti b_k sono tutti nulli per $k \geq 0$. Inoltre, si ha che

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2} = \frac{1}{2N}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^N(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{N}}\left(1 - \frac{N}{\pi}x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{N}} - \frac{2N}{\pi^2}\left[x\frac{\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{N}} = \frac{2N}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right).$$

Quindi

$$S_{f^N}(x) = \frac{1}{2N} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{N}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)\cos(kx). \qquad (*)$$

(2) La serie S_{f^N} converge totalmente su $\mathbb{R}$, quindi converge anche uniformemente. Inoltre, poiché f^N è continua e regolare a tratti, abbiamo che $S_{f^N}(x) = f^N(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(3) Da (*) e dal punto (2), si ha che

$$1 = f^N(0) = S_{f^N}(0) = \frac{1}{2N} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{N}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right),$$

da cui, moltiplicando tutto per N, segue la tesi.