Primo compitino 14/01/2019. Corso A

Nome e Cognome [in stampatello] .... *matricola* ....

Test. Ogni quesito a), b), c) del test vale 2 punti. Totale: 22 punti.

1. Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Determinare una base di $\ker M$:

   b) Sia $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{C}) : MA = AM = 0\}$. Calcolare $\dim V$: ....

2. a) Trovare tutti i valori di θ per cui $z_\theta = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ è soluzione di
$$z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0.$$
   ....

3. a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice A^{-1}:

   b) Determinare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella base $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

   Risposta:

4. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ e consideriamo l'endomorfismo $\begin{array}{rccc} f: & V & \to & V \\ & p(x) & \mapsto & p(x+1) - p(x) \end{array}$

   a) Scrivere la matrice A di f nella base $1, x, x^2, x^3$:

   b) Scrivere la matrice B di f nella base $x^3 + x^2, 1, 2x^2 + x, x^2 + x$:

   c) Calcolare il determinante della matrice B: ....

5. Consideriamo il piano Π di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   a) Determinare un'equazione cartesiana per Π: ....

   b) Sia r la retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a Π. Determinare un'equazione parametrica della retta r:

   c) Determinare le coordinate del punto di intersezione $r \cap \Pi$:

Parte seconda – scrivere su un foglio, giustificando in dettaglio tutte le risposte.

Esercizio (14 punti). Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita n, chiamiamo *bandiera di sottospazi* un insieme di sottospazi $E_0, E_1, ..., E_n$ tali che

$$E_0 = \{O\} \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = V$$

a) Fare un esempio di una bandiera E_0, E_1, E_2, E_3 di sottospazi in $\mathbb{R}^3$.

b) Dimostrare che per ogni bandiera $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ di V si ha $\dim E_i = i$ per $i = 0, \ldots, n$.

c) Dimostrare che, data in uno spazio vettoriale V una bandiera di sottospazi $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$, se per ogni $i \geq 1$ scegliamo un vettore $\underline{v}_i \in E_i \setminus E_{i-1}$, l'insieme $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ è una base di V.

d) Data una bandiera di sottospazi $\mathcal{E} = \{E_0, E_1, ..., E_n\}$, sia T un endomorfismo di V tale che $T(E_i) \subseteq E_i$ per ogni $i = 0, ..., n$. Dimostrare che esiste una base di V tale che la matrice di T rispetto a tale base ha tutti i coefficienti sotto la diagonale uguali a zero.

   Calcolare la dimensione del sottospazio di tutti gli endomorfismi di V dato da

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = \ \{T \in L(V) : \ T(E_i) \subseteq E_i, \ i = 0, \ldots, n\}.$$

e) Date due bandiere $\mathcal{E} = \{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ e $\mathcal{E}' = \{E'_0, E'_1, E'_2, E'_3\}$ in $\mathbb{R}^3$ tali che

$$E_1 \cap E'_2 = \{0\} \quad e \quad E_2 \cap E'_1 = \{0\} \tag{1}$$

   calcolare $dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \ \cap \ \mathcal{F}_{\mathcal{E}'})$.

f) Calcolare $dim(\mathcal{F}_{\mathcal{E}} \ \cap \ \mathcal{F}_{\mathcal{E}'})$ anche per bandiere $\mathcal{E}, \ \mathcal{E}'$ in $\mathbb{R}^3$ che non soddisfano la condizione (1).