I compitino Geometria 17/1/2017

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

Parte I [circa 11 punti] *(per ogni quesito riempire col risultato o barrare la casella. Ogni risposta errata vale -1)*

1. Dati i 4 punti in $\mathbb{R}^3$ di coordinate cartesiane ortogonali

$$A \equiv (1, 0, -1),\ B \equiv (0, 1, -1)\ C \equiv (-1, 1, 0),\ D \equiv (1, 2, 3)$$

Determinare le equazioni cartesiane dei piani Π passante per A, B, C e Π' passante per A, B, D

$\Pi :$ ....

$\Pi' :$ ....

Scrivere un'equazione parametrica della retta r passante per il punto di mezzo E di AB e parallela alla retta passante per i punti C, D.

$$r : \begin{cases} \text{x=} \\ \text{y=} \\ \text{z=} \end{cases}$$

Determinare l'area del triangolo E, C, D.

$$Area(E, C, D) = \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

2. Indicare la dimensione di ciascuno dei seguenti spazi vettoriali (il campo su cui lo spazio è definito, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, è indicato caso per caso)

   (a) $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ A\underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{x} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$ (su $\mathbb{R}$);

   $dim_{\mathbb{R}}(V_1) = \dots\dots$

   (b) $V_2 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) : \ A = i \cdot ({}^t\overline{A})\}$ (su $\mathbb{R}$);

   $dim_{\mathbb{R}}(V_2) = \dots\dots$

   (ricordiamo: per ogni matrice complessa A, la matrice coniugata $\overline{A}$ è la matrice ottenuta coniugando tutti gli elementi di A)

   (c) $V_3 = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2) : \ (0, 0, 1) \in ker(f)\}$ (su $\mathbb{C}$);

   $dim_{\mathbb{C}}(V_3) = \dots\dots$

3. Scrivere tutte le soluzioni complesse dell'equazione: $\overline{z} = z^2$

....

Parte II (scrivere su un foglio)

Esercizio 1 [circa 11 punti] Sia $V_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + (k-2)y - kt = 0 \\ x - y + (1-k)z - t = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base per V_k.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia

$$W_k = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) : \; ker(f) \supset V_k, \; Im(f) \subset V_k \; \}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di W_k.
(riportare il procedimento usato per dedurre tale dimensione).

(c) [facoltativo] Determinare la dimensione di $W_0 \cap W_k, \; k \neq 0$.

Esercizio 2 [circa 11 punti] Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (spazio vettoriale su $\mathbb{C}$) e sia $A \in V$. Sia poi $F_A : V \to V$ l'endomorfismo

$$F_A(X) = {}^t\overline{A} X A.$$

(a) Dimostrare che F_A è lineare.

(b) Calcolare la matrice associata ad F_A rispetto alla base canonica

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \; E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \; E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \; E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di V quando la matrice A è data da

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

(c) Dimostrare che se X è una matrice hermitiana (cioè X è tale che $X = {}^t\overline{X}$) allora $F_A(X)$ è anch'essa hermitiana, per ogni $A \in V$. Similmente se X è antihermitiana (cioè tale che $X = -{}^t\overline{X}$) allora $F_A(X)$ è antihermitiana.