21/4/2015- Compitino Geometria: *fare la prima parte e gli esercizi 1 e 2-*
Appello straordinario: *fare la prima parte e gli esercizi 2 e 3*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

I parte (compitino e appello straordinario)

Per ogni quesito spuntare il si o il no o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) [3pti] Scrivere una matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

1. M non abbia autovalori reali; $M = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$;
2. M abbia come autovalore solo $\lambda = 1$ e come autospazio $V_1 = Span\{\underline{e}_1\}$, dove $\underline{e}_1 = (1, 0)$; $M = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$;
3. M abbia autovalori 1 e -1 con $V_1 = Span\{\underline{e}_1 + \underline{e}_2\}$, $V_2 = Span\{\underline{e}_1 - \underline{e}_2\}$, $\underline{e}_2 = (0, 1)$; $M = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$.

2) [4pti] Sia A una matrice quadrata avente tutti autovalori reali;

1. dimostrare nel riquadro che la matrice $B = A + iI$, dove $i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria, è invertibile

.

2. se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ scrivere l'inversa di B; $B^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$;

3)[4pti] Sia $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 \in \mathbb{R}[\lambda]$. Dire se $p(\lambda)$ può essere il polinomio caratteristico di una matrice A a coefficienti reali tale che:

1. A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$; se sì esempio $A =$
2. A non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$: $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$; se sì esempio $A =$

Parte II

Esercizio 1 [solo compitino] In $\mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane (x, y, z) rispetto alla base canonica, siano $V = \{x = 0\}$, $W = \{y = 0\}$ due sottospazi di dimensione 2.

1. Scrivere un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che V e W siano sottospazi f-invarianti e tale che f abbia 3 autovalori reali distinti.

2. Descrivere lo spazio vettoriale

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad V \text{ e } W \text{ sono } f\text{-invarianti}\}$$

   e calcolare $dim(\mathcal{F})$ esibendone una base.

3. Dimostrare che se $f \in \mathcal{F}$ e le restrizioni $f_{|V}$ e $f_{|W}$ sono diagonalizzabili, allora f è diagonalizzabile.

Esercizio 2 [compitino e appello straordinario]. Siano $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, e sia

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Sia $\varphi_\alpha : V \to W$ definita come

$$\varphi_\alpha : \ p(x) \to p(M_\alpha)$$

   (ricordiamo che se $p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ allora $p(M) = a_0M^3 + a_1M^2 + a_2M + a_3I$ per ogni matrice M, dove I è la matrice identità dello stesso ordine di M). Calcolare la matrice associata a φ_α rispetto a basi canoniche di V e di W.

2. Sia $\psi : W \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$\psi(A) = a_{11}x^3 + a_{12}x^2 + a_{21}x + a_{22}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,2}.$$

   Calcolare la matrice associata all'endomorfismo $\psi \circ \varphi_\alpha$ di V rispetto alla base canonica di V e dimostrare che tale endomorfismo è diagonalizzabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare anche una base di autovettori per V, quando $\alpha = 0$.

3. [facoltativo] Sia $V = R_m[x]$, $W = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. Dimostrare che per ogni $m \geq 0$ e per ogni $M \in W$ l'applicazione lineare $\varphi_M : V \to W : \ p(x) \to p(M)$ ha rango $rg(\varphi_M) \leq n$. Caratterizzare quelle M tali che $rg(\varphi_M) = 1$.

Esercizio 3 [solo appello straordinario] Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$, e sia $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Definiamo $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ come

$$\varphi(p(x), q(x)) \ = \ tr(p(M)q(M)).$$

1. Dimostrare che φ è un prodotto scalare su V.

2. Calcolare la segnatura di φ e una base ortogonale quando $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.