Terzo compitino - Geometria I - 22/5/2014

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

I parte

Per ogni quesito spuntare il si o il no o riempire col risultato (dove richiesto); 1 punto per ogni risposta giusta; -1 per ogni risposta errata.

1) Sia $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ una matrice quadrata simmetrica.

se $A^2 > 0$ allora $A > 0$ si no ; se $A > 0$ allora $A^2 > 0$ si no

Se $det(A) > 0$ e $tr(A) > 0$ allora $A > 0$ si no

2) Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n e $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare. Allora:

$\varphi > 0$ se, fissato $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, allora $\forall\, W \subset V$, $dim(W) = k$, $\varphi|_W > 0$ si no ;

$\varphi < 0$ se, fissato $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, allora $\forall W \subset V$, $dim(W) = k$, $\varphi|_W < 0$ si no ;

φ è indefinito se, fissato $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, allora $\forall W \subset V$, $dim(W) = k$, $\varphi|_W$ è indefinito si no ;

$\exists\, W \subset V$ tale che $dim(W) = \iota_+(\varphi)$ e $\varphi_{|W} < 0$ se e solo se $\iota_+(\varphi) \leq \iota_-(\varphi)$ si no ;

se φ è degenere allora $\forall\, W \subset V$ si ha $\varphi_{|W}$ è degenere si no ;

$\varphi_{|W}$ è degenere se e solo se $dim(W \cap V^\perp) > 0$ si no

$\varphi_{|W}$ è degenere se e solo se $dim(W \cap W^\perp) > 0$ si no

3) Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare

$$\varphi(p(x), q(x)) = p(1)q(1) + p(0)q(0) + p(-1)q(-1).$$

Allora:

φ è definito positivo si no ; esistono vettori isotropi si no ; φ è degenere si no ;

l'operatore $f : V \to V$ dato da $f(p(x)) = -p(x)$ è simmetrico si no ;

l'operatore $f : V \to V$ dato da $f(p(x)) = p(-x)$ è simmetrico si no

4) (facoltativo) La forma canonica affine della conica: $3x^2 + 3y^2 + 4xy - 5 = 0$ è data da:

....

Parte II

Esercizio 1. Sia $V := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sia $A \in V$ una matrice simmetrica e sia $\varphi_A : V \times V \to \mathbb{R}$ dato da

$$\varphi_A(X, Y) = tr({}^tXAY), \quad X, Y \in V.$$

1. Dimostrare che φ_A è un prodotto scalare in V, qualunque sia la matrice simmetrica A.
2. Caratterizzare le matrici simmetriche A per cui i due sottospazi

   $S := \{M \in V \ : \ M \text{ è simmetrica}\}$, $T := \{M \in V \ : \ M \text{ è antisimmetrica }\}$

   sono ortogonali per φ_A.
3. Calcolare la segnatura di φ_A in termini della segnatura di A.

Esercizio 2. Sia $\underline{v} \equiv (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

1. Estendere $\underline{v}$ a una base $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$, $\underline{v}_1 = \underline{v}$, e scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, rispetto a $\mathcal{B}$, di un prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che sia non-degenere e tale che $\underline{v}$ sia isotropo per φ.
2. Determinare una base ortogonale per φ ortogonalizzando la base $\mathcal{B}$.
3. Dimostrare che esistono basi $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{B}'''$ di $\mathbb{R}^3$ tali che si abbia:
   (a) $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0, \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{B}'$;
   (b) $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) < 0, \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{B}''$;
   (c) $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) = 0, \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{B}'''$;
4. Sia $H = v^{\perp}$. Dimostrare che $\varphi_{|H}$ è degenere.
5. Sia $K \subset \mathbb{R}^3$ contenente due vettori isotropi indipendenti. Dimostrare che $\varphi_{|K}$ è non degenere.