Compito di Geometria I - 11/1/2017

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

(per ogni quesito spuntare una (sola) casella o riempire col risultato, dove richiesto; ogni risposta errata vale -1)

1) Siano $P_1 \equiv (-1,-1,0)$, $P_2 \equiv (0,0,2)$, $P_3 \equiv (0,-2,0)$, $P_4 \equiv (1,0,1)$ punti in $\mathbb{R}^3$.

- L'equazione del piano passante per P_1, P_2 e per il punto di mezzo del segmento P_3P_4 è:

  ....

- La retta passante per P_1 e P_2 è sghemba con la retta passante per P_3 e P_4 | si | no |

2) Sia A una matrice quadrata di ordine 2 a coefficienti reali.

- Se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ allora A è diagonalizzabile anche su $\mathbb{R}$ | si | no |
- Se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ e $tr(A) = 0$ allora A è diagonalizzabile anche su $\mathbb{R}$ | si | no |
- Se $det(A) < 0$ allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ | si | no |

3) Scrivere la segnatura delle seguenti matrici simmetriche:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad i_+ = \text{..........} \; i_- = \text{..........} \; i_0 = \text{..........}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i_+ = \text{..........} \; i_- = \text{..........} \; i_0 = \text{..........}$$

4) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ scrivere tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z + k\bar{z} \; = \; i$$

....
....
....

(risolvere su un foglio: esercizi diversi su fogli diversi)

Esercizio 1. Sia

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}-k & 0 \\ 2-k & 1 & -k \\ k^2-2 & 2k-1 & k^2 \end{bmatrix}$$

$k \in \mathbb{R}$.

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ dire (giustificandolo) se M_k è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$).

2. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z = 0\}$ e sia $W = ker(M_0)$. Determinare basi per V, per W e per $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ e sia $\varphi_a : V \times V \to \mathbb{R}$ dato da

$$\varphi_a(p(x), q(x)) = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(a)q(a), \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Dimostrare che φ_a è un prodotto scalare e determinarne la segnatura al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. Determinare una base ortogonale per φ_1.