Compito di Geometria I - 11/6/2014

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

I parte

Per ogni quesito spuntare una (sola!) casella o riempire col risultato (dove richiesto); 1 punto per ogni risposta giusta; -1 per ogni risposta errata.

1) L'equazione del piano passante per il punto $P \equiv (1, -1, 0)$ e parallelo al piano $x + 2y + 3z = 1$ è:

....

2) Un insieme $\mathcal{A}$ di k vettori in $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se

[A] per ogni sottospazio $W \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione $n - k$ si ha

$$dim(Span(A) \cap W) \ > 0.$$

[B] per ogni sottospazio $W \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione $> n - k$ si ha

$$dim(Span(A) \cap W) \ > 0.$$

[C] per ogni sottospazio $W \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione $< n - k$ si ha

$$dim(Span(A) \cap W) \ = 0.$$

3) Sia $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$. Sia $W := \{M \in V \ : \ M\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Allora

La dimensione di W é: .... ;

4) Se nel punto precedente si ha $\mathbf{v} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ (tutte le coordinate uguali a 1) allora un supplementare di W in V è dato dal sottospazio $U \subset V$

$U :=$ ....

5) Sia $V = \mathbb{C}^2$. L'insieme delle soluzioni di: $\quad i\,\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} \in V,$
($\overline{\mathbf{v}}$ è il coniugato del vettore $\mathbf{v}$) costituisce:

[A] un sottospazio vettoriale di dimensione 1 di V, visto come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$;

[B] un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di V, visto come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$;

[C] nessuna delle precedenti.

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. Sia $V_3 := \mathbb{R}_3[x]$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ definiamo $T_\alpha : V_3 \to V_3$ come

$$T_\alpha(p(x)) \;:=\; p(\alpha) + (x-\alpha)p'(\alpha) + \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 p''(\alpha)$$

(qui p' e p'' sono le derivate prime e seconde di p. Se $p(x) = a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ allora $p'(x) = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2$ e $p''(x) = 6a_0x + 2a_1$).

1. Dimostrare che ogni T_α è lineare.
2. Sia $V_2 := \mathbb{R}_2[x]$ il sottospazio dei polinomi di grado ≤ 2. Dimostrare che ogni T_α è una proiezione su V_2 (cioè
   (a) $Im(T_\alpha) = V_2$
   (b) $T_\alpha|_{V_2} = id_{V_2}$)

   e dedurre che $T_\alpha^2 = T_\alpha$.
3. Determinare base per $ker(T_\alpha)$.

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

II parte

Per ogni quesito spuntare una (sola!) casella o riempire col risultato (dove richiesto); 1 punto per ogni risposta giusta; -1 per ogni risposta errata.

1) La matrice

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & -sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

A è diagonalizzabile sui reali; B è diagonalizzabile sui complessi;
C non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

2) Scrivere un esempio di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che A^2 sia diagonalizzabile ma A non lo sia (su $\mathbb{K}$: dire che campo si sta usando)

$A =$ ....

3) Sia $p(\lambda) = \lambda^4 - 1$ il polinomio caratteristico di una matrice A. Scrivere i valori di: ordine di A, $det(A)$, $tr(A)$, e dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$:

....

....

4) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora

A $\forall$ autovalore λ di A vale $\mu_a(\lambda) = \mu_a(\overline{\lambda})$ ma può essere $\mu_g(\lambda) \neq \mu_g(\overline{\lambda})$

B $\forall$ autovalore λ di A vale $\mu_g(\lambda) = \mu_g(\overline{\lambda})$ ma può essere $\mu_a(\lambda) \neq \mu_a(\overline{\lambda})$

C $\forall$ autovalore λ di A vale $\mu_g(\lambda) = \mu_g(\overline{\lambda})$ e $\mu_a(\lambda) = \mu_a(\overline{\lambda})$

5) Sia A una matrice quadrata di ordine n tale che $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $A^m = 0$. Allora

A L'unico autovalore (complesso) di A è 0 e quindi $tr(A) = 0$.
B $tr(A) = 0$ ma A può avere autovalori complessi $\neq 0$.
C Si può dedurre che $det(A) = 0$ ma non che $tr(A) = 0$.

(risolvere su un foglio)

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$. Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione $n-1$ e sia $f: V \to V$ un endomorfismo tale che $f|_W = id|_W$.

1. Dimostrare che f è diagonalizzabile se e solo se W ha un supplementare invariante.

2. Sia T_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, l'operatore dell'esercizio 1. Dimostrare che T_α è diagonalizzabile e determinarne una base di autovettori.

3. Dimostrare che se $\alpha \neq \beta$ allora T_α e T_β non sono simultaneamente diagonalizzabili.

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

III parte

Per ogni quesito spuntare una (sola!) casella o riempire col risultato (dove richiesto); 1 punto per ogni risposta giusta; -1 per ogni risposta errata.

1) Scrivere la segnatura della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\sigma(A) =$ ....

2) Sia V spazio vettoriale di dimensione n. L'indice di positività di un prodotto scalare $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ si può definire come:

$\boxed{\text{A}}$ $min\{n - dim\ W : \ W \subset V$ sottospazio tale che $\varphi|_{|W} < 0\}$;

$\boxed{\text{B}}$ $min\{n - dim\ W : \ W \subset V$ sottospazio tale che $\varphi|_{|W} \leq 0\}$;

$\boxed{\text{C}}$ $max\{k \in \mathbb{N} : \ \exists\ \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\ t.c.\ \varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) > 0,\ i = 1, ..., k\}$;

3) Sia $D \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ di rango 2. Siano $A = D({}^tD),\ B = ({}^tD)D$. Scrivere quanto indicato.

Dimostrare che A e B sono simmetriche:

....

Dimostrare che $A \geq 0$ e $B \geq 0$

....

Dimostrare che $\iota_0(A) > 0$ (e quindi non può essere $A > 0$.)

....

Dimostrare che $B > 0$: [*pti* 3]..

....

4) (facoltativo) Data la conica $x^2 - 2y^2 + 2x + 2 = 0$ determinare le coordinate dei centri (se esistono) e scrivere la forma canonica affine

(risolvere su un foglio)

Esercizio 3. SIa V uno spazio vettoriale reale e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare definito positivo.

1. Dimostrare che se l'endomorfismo $T : V \to V$ è simmetrico allora
$$Ker(T) \perp Im(T).$$

2. Dimostrare che se T è una proiezione (su $Im(T)$) allora la condizione precedente è anche sufficiente affinché T sia simmetrico.

3. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare canonico
$$\varphi(p(x), q(x)) \ := \ \sum_{i=0}^{3} p_i q_i$$
se $p(x) = p_0 x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3$, $q(x) = q_0 x^3 + q_1 x^2 + q_2 x + q_3$.
Se $T_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, è come negli esercizi 1 e 2, determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui T_α risulti simmetrico rispetto al prodotto φ.