Compito di Geometria I - 11/6/2015

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

I parte

Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per i due punti $P \equiv (1, 1, 1)$, $Q \equiv (-2, 1, 3)$.

eq. param.: ; eq. cart.:

2) Scrivere l'equazione cartesiana del piano Π passante per i due punti P, Q del punto precedente e per il punto $R \equiv (-1, -1, 3)$.

Π : ....;

Determinare anche l'area del triangolo PQR e il volume del tetraedro $OPQR$ dove O è l'origine delle coordinate.

$area(PQR)$ =......................................; $vol(OPQR)$ =.....................................

3) Un insieme A di n vettori in $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se e solo se

- $\exists$ un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ tale che $f(A)$ è linearmente indipendente | si | no |;

- $\forall$ endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ si ha che $f(A)$ è linearmente indipendente | si | no |;

- $\exists$ un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ tale che $Span(f(A)) = \mathbb{R}^n$ | si | no |

- $\forall$ endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ si ha

$$dim(Span(A) \cap ker(f)) \ + \ dim(Span(f(A))) = n$$ | si | no |

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. Sia $V := \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$ e siano $f, g : V \to \mathbb{R}$ le funzione (non lineari!)

$$f(A) := (tr(A))^2, \quad g(A) = tr(A^2).$$

1. Dimostrare che f e g sono invarianti per similitudine (cioè assumono lo stesso valore su matrici simili).
2. Per $n = 2$, esprimere la funzione determinante $det(A)$ come combinazione lineare delle due funzioni f e g.
3. Si può dedurre dal punto precedente che se due matrici di ordine 2 hanno la stessa traccia allora hanno anche lo stesso determinante? (giustificare la risposta).

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

II parte

Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Scrivere gli autovalori delle matrici seguenti e per ognuno di essi una base per i relativi autospazi.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

autovalori e basi per gli autospazi:

....

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

autovalori e basi di autospazi:

....

2) Dire se esiste un esempio di una matrice A di ordine 3 tale che valga la condizione scritta e nel caso positivo produrne uno.

- A non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$: ....

- A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$: ....

- A é diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, ha tutti autovalori reali, ma non è diagonalizzabile

su $\mathbb{R}$: ....

3) Sia $p(\lambda) = \lambda(1 - \lambda^5)$ il polinomio caratteristico di una matrice A. Scrivere i valori di: ordine di A, $det(A)$, $tr(A)$, e dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$:

....

....

(risolvere su un foglio)

Esercizio 2. Sia G l'insieme delle matrici di ordine n composte da 4 blocchi

$$G = \{M \in \mathcal{M}_n[\mathbb{K}] : \ M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}\}$$

dove si hanno i blocchi quadrati diagonali $A \in GL_k(\mathbb{K})$, $C \in GL_h(\mathbb{K})$ (dove k, h, sono due numeri fissi con $h + k = n$) e B è una qualunque matrice di tipo (k, h), mentre O è la matrice nulla di tipo h, k.

1. Dimostrare che G è un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{K})$ (rispetto alla moltiplicazione righe per colonne)
   [occorre dimostrare che è chiuso per moltiplicazione, che ha elemento neutro, e che ogni elemento ha un inverso moltiplicativo in G].

2. Dimostrare che l'insieme $H \subset G$ delle matrici $M \in G$ tali che $A = Id_k$ e $C = Id_h$ (le matrici identiche di ordini k e h rispettivamente) è un sottogruppo abeliano (=commutativo) di G e che $M \in H$ è diagonalizzabile se e solo se $B = 0$.

3. *[facoltativo]* Dimostrare che se N è una qualunque matrice in G e M è una qualunque matrice in H, allora la matrice coniugata

   $$N^{-1}MN$$

   è ancora in H.

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

III parte

Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Scrivere la segnatura delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma(A) = \text{..}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma(A) = \text{..}$$

2) Sia V spazio vettoriale di dimensione n, e sia φ un prodotto scalare su V. Se $\underline{v}$ è un vettore isotropo (non nullo) allora:

- il prodotto φ è degenere | si | no |

- $\underline{v}$ si estende a una base ortogonale se e solo se il prodotto φ è degenere | si | no |

- se il prodotto φ è degenere allora $\underline{v} \in V^{\perp}$ | si | no |

3) Sia φ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ di segnatura $(3, 1, 0)$. Allora:

- $\forall$ sottospazio W di dimensione 3 si ha $\varphi_{|W} > 0$ | si | no |

- $\exists$ un sottospazio W di dimensione 2 tale che $\varphi_{|W}$ ha segnatura $(1, 1, 0)$ | si | no |

- $\exists$ un sottospazio W di dimensione 3 tale che $\varphi_{|W}$ è degenere | si | no |

(risolvere su un foglio)

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare non degenere. Sia V^* lo spazio duale di V (ossia lo spazio delle applicazioni lineari di V in $\mathbb{R}$).

1. Dimostrare che se l'applicazione $T : V \to V^* : \ \underline{v} \to T(\underline{v})$, dove $T(\underline{v}) \in V^*$ è definita da
$$T(\underline{v})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}), \quad \underline{u} \in V,$$
è un isomorfismo tra V e V^*

   [considerare le dimensioni degli spazi e del nucleo].

2. Dimostrare che se W è un sottospazio di V e $W^\perp$ è il suo ortogonale allora
$$T(W^\perp) \ = \ \{f : V \to \mathbb{R} : \ W \subset ker(f)\}$$