Compito di Geometria I - 13/6/2016

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

I parte

Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Dati i punti $P_1 \equiv (0, 1, -1)$, $P_2 \equiv (1, 0, -1), P_3 \equiv (1, -1, 0)$, $P_4 \equiv (0, 0, 1)$,

1. scrivere equazioni parametriche per la retta r passante per i due punti P_1, P_2 e per la retta s passante per P_3, P_4 :

   r : ; s :

2. dire se r e s sono sghembe: | si | no |

3. calcolare la distanza tra il punto P_1 e il piano Π passante per P_2, P_3, P_4.

   dist(P_1,Π)=

Esercizio 1. (risolvere su un foglio)

1. Costruire due endomorfismi $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, entrambi non nulli, tali che

$$g \circ f \;=\; 0$$

2. Fissato un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ di rango 1, tale che $ker(g) = \{(x, y, z) : z = 0\}$, sia $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) : \; g \circ f = 0\}$. Calcolare $dim(\mathcal{F})$ indicandone anche una base.

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

II parte

Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1)

1. Scrivere una matrice A di ordine 2 tale che il suo polinomio caratteristico $p_A(t)$ sia di grado maggiore del suo polinomio minimo $\varphi_A(t)$, e una matrice B di ordine 2 tale che $p_B(t) = \varphi_B(t)$.

   $A =$ $\qquad$ $p_A(t) =$ $\qquad$ $\varphi_A(t) =$

   $B =$ $\qquad$ $p_B(t) = \varphi_B(t) =$

2. Una matrice come A può essere non diagonalizzabile? | si | no |

3. Una matrice come B può essere non diagonalizzabile? | si | no |

Esercizio 2. (risolvere su un foglio) Sia $f_z : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ z \in \mathbb{C}$, l'endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ dato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$\begin{bmatrix} z & i\bar{z} \\ 1-z & \bar{z} \end{bmatrix}$$

1. Calcolare i valori di $z \in \mathbb{C}$ per cui f_z risulti diagonalizzabile.
2. Per $z = i$, calcolare gli autovalori e una base di autovettori per f_z.

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

III parte

Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Scrivere la segnatura del prodotto scalare φ_A di $\mathbb{R}^3$ canonicamente associato ad A :

   $\sigma(A) =$ ....

2. Ci sono vettori isotropi? $\boxed{\text{si}}\boxed{\text{no}}$; se sì, scriverne uno: $\underline{v} =$ ....

3. Scrivere una base dell'ortogonale rispetto a φ_A di $Span((1, 1, 0))$

   ....

Esercizio 3. (risolvere su un foglio) Sia $V = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e sia $\underline{v} \equiv (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Sia $F_{\underline{v}} : V \to \mathbb{R}$ il funzionale $F_{\underline{v}}(A) = \sum_{i=1}^{3} v_i a_{ii}$. Sia $\varphi_{\underline{v}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare

$$\varphi_{\underline{v}}(A, B) := F_{\underline{v}}({}^tA\,B).$$

1. Determinare la segnatura di $\varphi_{\underline{v}}$ per $\underline{v} \equiv (1, -1, 1)$.
2. Determinare la segnatura di $\varphi_{\underline{v}}$ in funzione di $\underline{v}$.
3. [facoltativo] Caratterizzare quei $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ per cui si abbia che $\varphi_{\underline{v}} > 0$ e

$$\varphi_{\underline{v}}(A, B) = \varphi_{\underline{v}}(B, A), \quad \forall A, B \in V$$