Compito di Geometria I - 16/9/2016

Nome e cognome (stampatello) ....
matricola..............................

I parte (riempire dove richiesto). **Attenzione**: *ogni domanda esatta punti* $1,5$*; ogni domanda errata* -1. **Occorre ottenere almeno** 3 **punti in questa parte** *altrimenti il compito sarà considerato totalmente insufficiente (la parte successiva non verrà neppure guardata).*

1) Dati i punti $P_1 \equiv (1,-2,1), P_2 \equiv (0,-1,1), P_3 \equiv (2,-1,-1)$:

a) scrivere un'equazione cartesiana del piano Π passante per i tre punti P_1, P_2, P_3 :

Π : ....;

b) Determinare l'area del triangolo $P_1P_2P_3$

Area= ....

c) Scrivere le coordinate del baricentro $G \in \Pi$ del triangolo $P_1P_2P_3$;

$G \equiv (\dots , \dots , \dots)$

d) Determinare un'equazione parametrica della retta r passante per G e ortogonale a Π.

$$r : \begin{cases} x = \dots\dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots\dots \\ z = \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

e) Determinare sulla retta r un punto P_4 tale che il volume del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ valga 1

$P_4 \equiv (\dots , \dots , \dots)$

2) a) Scrivere una matrice M a coefficienti reali di ordine 2 tale che M sia diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$

$$M = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

b) Scrivere due matrici A e B che abbiano come polinomio caratteristico $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2i\ \lambda^2 + \lambda$ e tali che A sia diagonalizzabile mentre B non lo sia (su $\mathbb{C}$).

$A =$; $B =$

c) Sia $\underline{e}_1 \equiv (1,0) \in \mathbb{R}^2$. L'insieme delle matrici

$$S := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \text{il vettore } \underline{e}_1 \text{ è autovettore di } A\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ di dimensione

$dim(S) =$ ....

d) Scrivere la segnatura della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$segnatura(A) = \ (\ \dots \ , \ \dots \ , \ \dots \ )$

e) Scrivere tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 - 2iz - 2 = 0$

$z =$ ....

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

II parte (risolvere su un foglio: fogli diversi per esercizi diversi.)

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $T_\alpha : V \to V,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$, l'applicazione data da

$$T_\alpha(p(x)) \ = \ \frac{1}{\alpha}(p(x+\alpha) - p(x))$$

1. Dimostrare che T_α è lineare e vale

$$grado(T_\alpha(p(x)) < grado(p(x))$$

   per ogni $p(x)$ in V.

2. Sia Q l'endomorfismo di V dato da $Q(p(x)) = x \cdot p(x)$.

   Sia $V_n = \mathbb{R}_n[x]$. Per il punto precedente le due composizioni $f := T_\alpha \circ Q$ e $g := Q \circ T_\alpha$ mandano V_n in sé stesso, per ogni n. Dimostrare che le restrizioni di f e g a V_2 sono entrambe diagonalizzabili (come endomorfismi di V_2), mentre la differenza $f - g$ non lo è

   [sugg.: si possono calcolare le matrici associate alle basi canoniche].

3. Dedurre che f e g non possono essere diagonalizzate simultaneamente.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^2$ dotato del prodotto hermitiano canonico $\varphi((x,y),(z,w)) = \overline{x}z + \overline{y}w$, siano date le due basi ortonormali $\mathcal{B}_1 = \{\underline{u}_1 \equiv (1,0),\ \underline{u}_2 \equiv (0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\underline{v}_1 \equiv (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ \underline{v}_2 \equiv (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$.

1. Determinare 2 matrici *simmetriche reali* $A_1,\ A_2$ tali che A_i abbia $\mathcal{B}_i$ come base di autovettori relativi agli autovalori 1 e -1 ($i = 1,2$). Si richiede qui che il vettore di base con indice 1 sia autovettore per l'autovalore 1, mentre quello di indice 2 sia autovettore per l'autovalore -1.

2. Dopo aver verificato che $|\varphi(\underline{u}_i, \underline{v}_j)|^2 = 1/2$ per ogni coppia di indici $i,j \in \{1,2\}$, determinare una terza base ortonormale $\mathcal{B}_3 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ di $\mathbb{C}^2$ tale che valga ancora $|\varphi(\underline{w}_i, \underline{u}_j)|^2 = 1/2$ e $|\varphi(\underline{w}_i, \underline{v}_j)|^2 = 1/2$, per ogni coppia $i,j \in \{1,2\}$.

3. Determinare una matrice *hermitiana* $A_3 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ che abbia $\underline{w}_1$ come autovettore relativo all'autovalore 1 e $\underline{w}_2$ come autovettore relativo all'autovalore -1.

Regolamento: Chi ottiene un voto sufficiente può optare per la conferma senza bisogno dell'orale (ci sarà solo una breve discussione sullo svolgimento dello scritto). Sono tenuti a fare l'orale quelli con voto insufficiente (≥ 14).