Compito di Geometria I - 9/7/2014

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Parte 1 (scrivere direttamente negli spazi assegnati)

1) Dato il piano Π di equazione $x + 2y + 3z = -1$ e la retta r di equazione parametrica $\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{v}$, con $\underline{x}_0 \equiv (0, -1, 1)$ e $\underline{v} \equiv (1, 0, 1)$, scrivere l'equazione parametrica di una retta r' appartenente a Π, passante per $r \cap \Pi$ e ortogonale alla retta r (cioè le direzioni delle due rette sono ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico)

....

2) Siano $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}_4[x]$ e sia $f : V \to W$ definita da $f(p(x)) = q(x)p(x)$ dove $q(x) = x^2 + x + 1$. Definire (sulla base canonica di W) un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale $g \circ f = id|_V$.

.

3)

a. Dati due sottospazi distinti di dimensione 2, $V,\ W \subset \mathbb{R}^3$, calcolare la dimensione del sottospazio $S \subset Hom(\mathbb{R}^3)$ dato da $S = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 :\ f(V) \subset V,\ f(W) \subset W\}$.

$dim(S) =$ ....

b. Se $V = \{x = 0\},\ W = \{y = 0\}$, calcolare il numero delle isometrie (trasformazioni ortogonali) contenute in S :

$numero(isometrie) =$ ....

4) Scrivere la segnatura della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ed esibire sottospazi $W_+,\ W_-$ sui quali la restrizione sia definita rispettivamente positiva e negativa e il sottospazio radicale $V^\perp$.

$\sigma(A)$: ....

W_+ : ....

W_- : ....

$V^\perp$: ....

5) (facoltativo) Data la conica $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2y - 1 = 0$ determinare le coordinate dei centri (se esistono) e scrivere la forma canonica affine

....

....

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. Sia $V_n := \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$, Per ogni matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ sia $T_A : V_n \to V_n$ l'applicazione

$$T_A(M) = A^{-1}MA$$

1. Dimostrare che T_A è lineare e che è un isomorfismo.
2. Sia $A \in O_n$. Dimostrare che il prodotto $\varphi(M, N) = tr({}^tMN)$ è definito positivo in V_n e T_A è una trasformazione ortogonale rispetto ad esso.
3. Dimostrare che, per $A \in O_n$, i sottospazi $Sim_n = \{M \in V_n : {}^tM = M\}$ e $Asim_n = \{M \in V_n : {}^tM = -M\}$ sono T_A-invarianti.
4. Per $n = 2$, dimostrare che se A è la matrice di una rotazione di angolo non multiplo di $\pi/2$ allora T_A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Siano V_n e $\varphi(M, N) = tr({}^tMN)$ come nell'esercizio precedente.

1. Sia $W = \{M \in V_n : tr(M) = 0\}$. Determinare $W^\perp$ (rispetto a φ).
2. Sia $B \in V_n$ e sia $F_B : V_n \to V_n$ data da $F_B(M) = M - tr(M)B, \quad M \in V_n$. Determinare B tale che F sia un operatore simmetrico (per φ). Determinare in questo caso la forma diagonale di F_B.
3. In generale, sia $f : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare non nullo su uno spazio euclideo (V, φ) e $F_{\underline{w}} : V \to V$ sia dato da

   $$F_{\underline{w}}(\underline{v}) = \underline{v} - f(\underline{v})\ \underline{w}.$$

   Caratterizzare i $\underline{w} \in V$ per cui $F_{\underline{w}}$ è simmetrico.