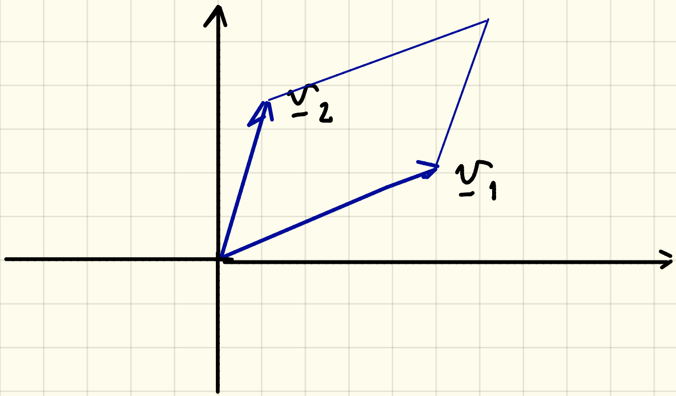
Lezione del 3/1 /2014

Indice della Lezione.

1. Significato geometrico del determinante.
2. A invertibile $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$
3. Formula per A^{-1} e algoritmo di calcolo.
4. Regola di Cramer
5. Teorema di Binet e corollari.
6. Caratterizzazione del rango in termini dei minori.

Caso 2×2. Siano $\underline{v}_1=(a,b)$, $\underline{v}_2=(c,d) \in \mathbb{R}^2$.

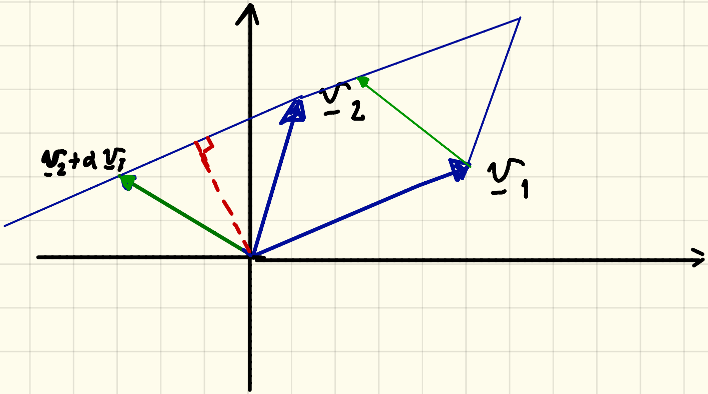
Consideriamo il <u>parallelogramma</u> di lati $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$: $P(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$



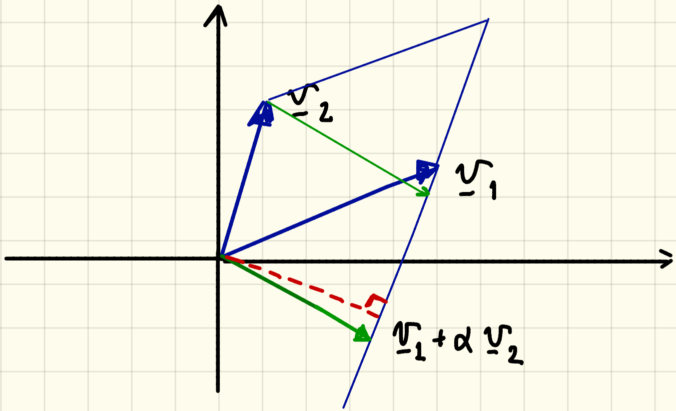
Area P = base × altezza

<u>nota</u>: $\text{Area } P(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{Area } P(\underline{v}_1, \underline{v}_2 + \alpha \underline{v}_1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$\phantom{\text{Area } P(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}$ " $= \text{Area } P(\underline{v}_1 + \alpha \underline{v}_2, \underline{v}_2)$

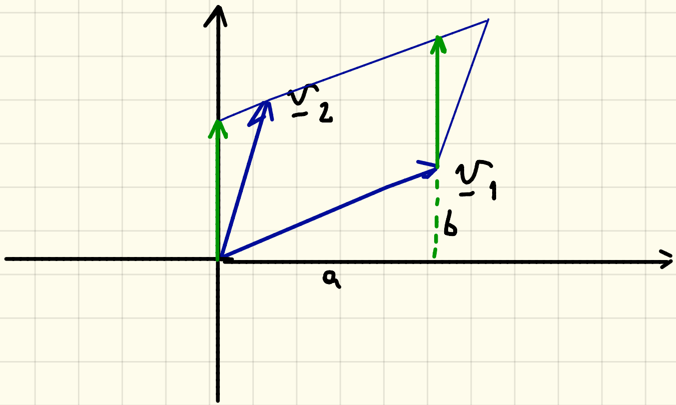


stesse base $\|\underline{v}_1\|$, stesse altezze



stesse base $\|\underline{v}_2\|$, stesse altezze

$$\text{Area } P(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{Area } P\left(\underline{v}_1, \underline{v}_2 - \frac{c}{a}\underline{v}_1\right) = \left| a\left(d - \frac{bc}{a}\right)\right| =$$
$$= |ad - bc|$$



Cioè: $\det\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} = \pm \text{Area } P(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

Si ha segno + se per andare da $\underline{v}_1$ a $\underline{v}_2$ con rotazione $< \pi$ si ruota in senso antiorario (viceversa $\det\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} < 0$).

Se $\det\begin{bmatrix}\underline{v}_1\\ \underline{v}_2\end{bmatrix} > 0$ la base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ si dirà <u>positivamente orientata</u>

se invece $\det\begin{bmatrix}\underline{v}_1\\ \underline{v}_2\end{bmatrix} < 0$ si dirà <u>negativamente orientata</u>.

Caso 3x3.

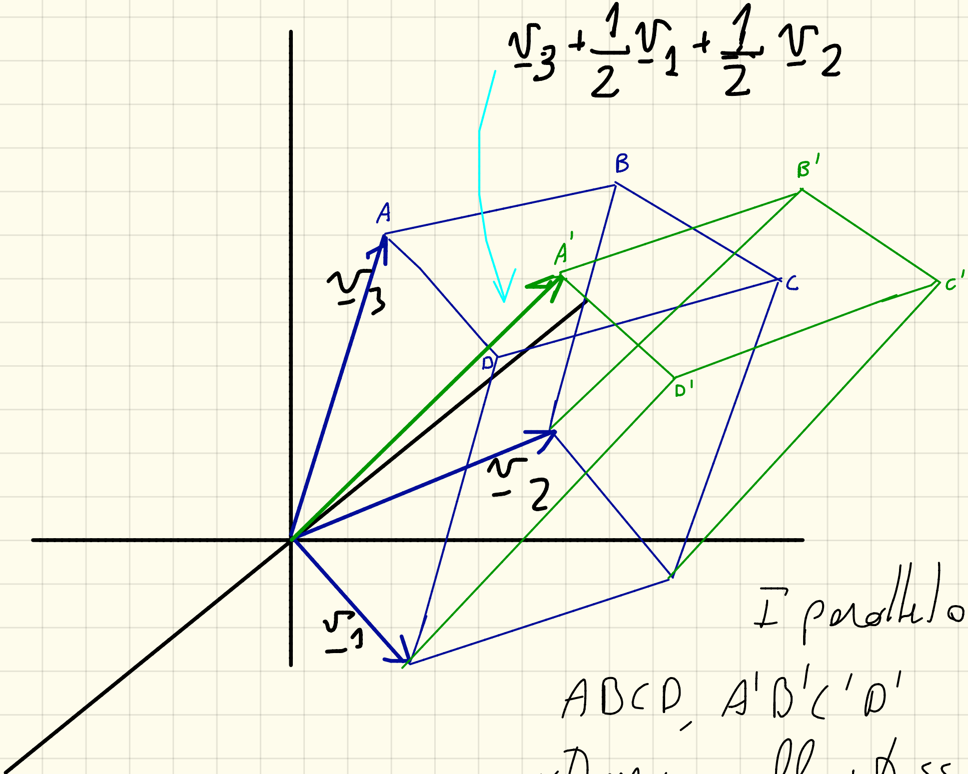
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. $\quad \underline{v}_1=(a,b,c), \underline{v}_2=(d,e,f), \underline{v}_3=(g,h,i)$.

Volume del parallelepipedo $P(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) =$

Area di base × altezza

$$\mathrm{Vol}\, P(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \mathrm{Vol}\, P(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 + \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2)$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.



I parallelogrammi ABCD, A'B'C'D' stanno nello stesso piano, che è parallelo al piano di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

Vol = Area Base x altezza

Come nel caso 2×2, si può "diagonalizzare il parallelepipedo" mantenendone il volume:

$$\mathrm{Vol}\, P\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \mathrm{Vol}\, P\begin{bmatrix} a'' & 0 & 0 \\ 0 & e' & 0 \\ 0 & 0 & i' \end{bmatrix} = \pm \det \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{bmatrix}$$

Le trasformazioni che si fanno si rileggono come operazioni elementari di riga sulla matrice delle componenti dei vettori.

<u>es</u> Il segno è + se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ è base <u>destrorsa</u>, (positivamente orientata) altrimenti è negativo (base negativamente orientata).

Prop. 1 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è invertibile $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = n$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

---

dim Il primo $\Leftrightarrow$ già visto. Il secondo $\Leftrightarrow$ deriva dalla proprietà $\det A = \pm \det S$, dove S è una riduzione a scala di A. Infatti sappiamo che: $\operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow S$ ha n pivot $\neq 0$ e abbiamo che $\det S$ è il prodotto dei pivot. —

Coroll. A singolare $\Leftrightarrow \det A = 0$

A non-singolare $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Formula per A^{-1}. Sia $\det A \neq 0$.

Si ha
$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \, \mathcal{a}_{ji}$$

$\mathcal{a}_{ji}$: complemento algebrico di a_{ji}.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, (A^{-1})_{jl} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \mathcal{a}_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = l \\ 0 & \text{se } i \neq l \end{cases}$$

Infatti se $i = l$ si ottiene lo sviluppo di Laplace di $\det A$ per la riga i-sima; se $i \neq l$ si ottiene 0

perché è lo sviluppo di Laplace per la l-sima riga della matrice B ottenuta da A sostituendo la riga l-sima di A con la riga i-sima di A: quindi B ha due righe uguali e pertanto $\det B = 0$.

<u>es</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det A = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$, invertibile, per trovare la soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$[A \,\vdots\, \underline{b}] \sim [I \,\vdots\, \underline{x}]$$ con operazioni sulla matrice completa.

Infatti i due sistemi sono equivalenti; ma il sistema $I\underline{y} = \underline{c}$ con matrice identità ha ovviamente soluz. $\underline{y} = \underline{c}$.

In particolare, applichiamo agli n sistemi:

$A\underline{x}^1 = \underline{e}_1, \dots, A\underline{x}^n = \underline{e}_n$ con $\underline{e}_i$ vettori canonici

Si può scrivere: $[A \,\vdots\, \underline{e}_1 \cdots \underline{e}_n] \sim [I \,\vdots\, \underline{x}^1 \cdots \underline{x}^n]$

per cui la matrice $[\underline{x}^1 \vdots \cdots \vdots \underline{x}^n] = A^{-1}$

Quindi:

$$[A \,\vdots\, I] \sim [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

Esempio:

Algoritmo per trovare A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Regola di CRAMER : $A\underline{x}=\underline{b}$, $A\in M_n(\mathbb{K})$, A non-singolare.

L'unica soluzione $\underline{x}$ è data da:

$$\boxed{x_j = \frac{\left|A^1 \cdots A^{j-1}\ \underline{b}\ A^{j+1} \cdots A^n\right|}{\det A}} \qquad j=1,\dots,n.$$

dim Infatti la soluzione si trova moltiplicando per A^{-1}:

$\underline{x}=A^{-1}\underline{b}$ e si verifica. Alternativamente,

$$\left|A^1 \cdots A^{j-1}\ \underline{b}\ A^j \cdots A^n\right| =$$

$$= \left|A^1 \cdots A^{j-1} \left(x_1 A^1 + \cdots x_j A^j + \cdots + x_n A^n\right) A^{j+1} \cdots A^n\right| =$$

$$= x_1 \left|A^1 \cdots A^{j-1}\ A^1\ A^{j+1} \cdots A^n\right| + \cdots + x_j \left|A^1 \cdots A^{j-1} A^j A^{j+1} \cdots A^n\right| + \cdots$$

$$+ x_n \left|A^1 \cdots A^{j-1} A^n A^{j+1} \cdots A^n\right| = x_j \det A$$

<u>es</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{9}{2}$$

Teorema (BINET). $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Allora:

$$\det AB = \det A \det B$$

<u>dim</u> Se una delle due A, B è singolare ($\Leftrightarrow$ $rg < n$) allora anche AB è singolare (infatti: il rango di una composizione di appl. lineari è $\leq$ al min dei ranghi [riguardare lezioni precedenti ...]). Quindi per la prop. 1 entrambi i membri valgono 0.
Altrimenti, si ha $\det B \neq 0$. Possiamo considerare allora la funzione $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ data da

$$\varphi(A) = \det(AB) / \det B$$

e dimostriamo che soddisfa i 3 assiomi del determinante.

Assioma di multilinearità -

La riga i-sima di AB si ottiene moltiplicando la riga i-sima di A per B:

$$(AB)_i = A_i \cdot B$$

Quindi se, ad es:

$$A_1 = \lambda A_1' + \mu A_1''$$

allora

$$(AB)_1 = (\lambda A_1' + \mu A_1'') B = \lambda A_1' \cdot B + \mu A_1'' \cdot B$$

$$(AB)_i = A_i \cdot B \quad , i > 1 .$$

Quindi $\det(AB) = \lambda \det(A'B) + \mu \det(A''B)$

dove $A' = \begin{bmatrix} A'_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$, $A'' = \begin{bmatrix} A''_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$

Dividendo per $\det B$ si ottiene:

$$\varphi(A) = \lambda \varphi(A') + \mu \varphi(A'').$$

<u>Scambio di righe</u>. Scambiando 2 righe di A si scambiano anche le corrispondenti righe di AB, quindi $\det(AB)$ cambia segno. Dividendo per $\det B$, si ha che $\varphi(A)$ cambia segno.

Normalizzazione. Se $A = I$, $AB = B$, quindi $\varphi(I) = 1$.

Per l'unicità del determinante, segue $\varphi(A) = \det A$, cioè $\det A = \det(AB) / \det B$, che dà la tesi —

Corollario 1. Se A è non singolare allora

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

dim $A A^{-1} = I \Rightarrow \det(A A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$.

Corollario 2. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si ha

$$\det(AB) = \det(BA)$$

dim. Infatti per il teo. sono entrambi uguali a $\det A \cdot \det B$ $\_$

Corollario 3. Se B è invertibile allora

$$\det B^{-1} A B = \det A$$

[Quindi det è INVARIANTE per similitudine]

I dim. Si applichi la formula di Binet e il corollario 1 $\_$

NOTA: La formula di Binet si applica anche al prodotto di più di 2 matrici (iterando).

II dim. Si applichi il coroll. 2.

$$\det\left(B^{-1}(AB)\right) = \det\left((AB)B^{-1}\right) = \det A$$

Ricordiamo che la **TRACCIA** di una matrice quadrata A è la somma dei suoi elementi diagonali:

$$\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}$$

Vale un risultato simile al coroll. 2

<u>Prop</u>. Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ allora

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

<u>dim</u> Se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{rs})$. si ha

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ij} = \operatorname{tr}(BA) \quad —$$

Come nella II dim. del corollario 2, si ottiene:

<u>La traccia è un invariante per similitudine.</u>

$$\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr} A$$

Quindi se $f: V \to V$ endomorfismo, possiamo definire

$$\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

$$\det(f) = \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

dove $\mathcal{B}$ è una qualunque base di V. Infatti, se scegliamo una diversa base $\mathcal{B}'$, la matrice associata cambia per similitudine (per la formula di cambiamento di base).

Altra caratterizzazione del rango di una matrice.

Teorema. Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Il rango di A è il massimo ordine di una sottomatrice quadrata non-singolare.

In altri termini: $\operatorname{rg} A = k \iff$

1) $\exists$ una sottomatrice quadrata di ordine k che sia non-singolare (quindi con $\det \neq 0$).
2) tutte le sottomatrici quadrate di ordine $> k$ sono singolari (quindi con $\det = 0$)

NOTA: per <u>sottomatrice</u> di A si intende una matrice ottenuta da A cancellando alcune righe e alcune colonne. Oppure, si può equivalentemente dire che si scelgono alcune righe, di indici $i_1, \dots, i_r$ di A, ed alcune colonne, di indici $j_1, \dots, j_s$, e si prendono gli elementi che stanno nell'intersezione, cioè gli elementi del tipo a_{i_h, j_k} $(h = 1, \dots, r;\ k = 1, \dots, s)$.

Per una sottomatrice quadrata, si avrà $r = s$.

dim teorema.

I) Se certi vettori $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \dots, \underline{v}_K = \begin{bmatrix} v_{1K} \\ \vdots \\ v_{nK} \end{bmatrix}$, $K \leq n$,

sono lin. dipendenti allora ogni sottomatrice quadrata di ordine K estratta dalla matrice

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} v_{11} & & v_{1K} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n1} & & v_{nK} \end{array} \right]$$

ha determinante nullo.

dim I. Infatti $\exists$ combinazione lineare non banale $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$. Quindi $\dim \ker M \geq 1$ e allora $\operatorname{rg} M < K$: quindi, K righe qualunque sono lineari.

dipendenti. Quindi se scegliamo una qualunque sotto=matrice $n \times n$, ottenuta prendendo n righe, questa sarà singo=lare, e quindi con det $= 0$ _

II) Se i vettori sopra scritti $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono lin. indip. allora $\exists$ sottomatrice quadrata $K \times K$ non singolare (e quindi con det $\neq 0$).

<u>dim</u> Infatti $\dim \ker M = 0$, quindi $\operatorname{rg} M = K$, cioè $\exists$ n righe lin. indipendenti. Pertanto la sottomatrice $n \times n$ formata da queste n righe è non singolare ed ha determinante $\neq 0$.

dim. teo. $\operatorname{rg} A = K \iff \exists\, K$ colonne lin. indip. e $\forall\, h > K$, h colonne qualunque sono lin. dipen. Per il punto II $\exists$ sottomatrice $h \times K$ (estratta da K colonne lin. indip.) con $\det \neq 0$. Per il punto I ogni sottomatrice $h \times h$, con $h > K$, è singolare.

Oss. Se ogni sottomatrice quadrata di ordine K ha $\det = 0$, allora tutte le sottomatrici quadrate di ordine h, per qualunque $h \geq K$, hanno deter. $= 0$. Ciò segue per induzione dallo sviluppo di Laplace.
