Lezione del 4/2/2014

Lemma Sia $f: V \to V$ diagonalizzabile e sia

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

la decomposizione in autospazi relativi agli autovalori distinti di f. Se $W \subset V$ è un sottospazio f-invariante allora

$$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_{\lambda_k})$$

dim. Basterà far vedere, per induzione su n, che se $\underline{w} \in W$ è somma

$$\underline{w} = \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_n \qquad (*)$$

di autovettori relativi ad autovalori distinti di f, allora $\underline{v}_j \in W$, $j = 1, \dots, n$. Per $n=1$ la tesi è evidente. Applicando f a $(*)$ si ha:

$$f(\underline{w}) = f(\underline{v}_1) + \cdots + f(\underline{v}_n) = \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n$$

e sottraendo a queste la (*) moltiplicata per λ_n si trova:

$$\underline{w}' = f(\underline{w}) - \lambda_n \underline{w} = (\lambda_1 - \lambda_n)\,\underline{v}_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\,\underline{v}_{n-1}$$

$\underline{w}' \in W$, perché $\underline{w}, f(\underline{w}) \in W$ che è invariante.

Per induzione $(\lambda_j - \lambda_n)\underline{v}_j \in W$, $j = 1, \dots, n-1$,

quindi $\underline{v}_j \in W$, $j = 1, \dots, n-1$ ($\lambda_j - \lambda_n \neq 0$ perché $\lambda_j \neq \lambda_n$ se $j < n$).

Allora da (*) segue che anche $\underline{w}_n \in W$.

<u>Corollario</u>. Se $f : V \to V$ è diagonalizzabile e $W \subset V$ è f-invariante, allora $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile.

<u>dim</u>. Infatti, dal Lemma W si decompone in somma di autospazi.

---

esercizio: altra dim. Sia $\mathcal{B}=\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V t.c. $\mathcal{B}'=\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è base di W. Allora

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \quad \text{con } A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K}).$$

Allora se λ è un autovalore di $A = M_{\mathcal{B}'}(f|_W)$ si ha $\mu_a(\lambda, f) = \mu_a(\lambda, f|_W) + \mu_a(\lambda, C) = \mu_g(\lambda, f)$

$$= n - rg(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I) \leq n - (rg(A - \lambda I) + rg(C - \lambda I)) = k - rg(A - \lambda I) + (n-k) - rg(C - \lambda I)$$

$$= \mu_g(\lambda, A) + \mu_g(\lambda, C) \leq \mu_a(\lambda, A) + \mu_a(\lambda, C)$$ quindi vale l'uguale

e siccome $\underset{=}{\mu_g(\lambda, A) \leq \mu_a(\lambda, A)}$, $\underset{=}{\mu_g(\lambda, C) \leq \mu_a(\lambda, C)}$ deve valere

Teorema. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrici diagonalizzabili. Allora A e B sono simultaneamente diagonalizzabili $\Longleftrightarrow$

$$AB = BA$$

---

dim ($\Leftarrow$) Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A, per cui $V = \mathbb{K}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ (autospazi per A). Se $\underline{v} \in V_{\lambda_j}$ si ha:

$AB\underline{v} = BA\underline{v} = B(\lambda_j \underline{v}) = \lambda_j B\underline{v}$, quindi V_{λ_j} è B-invariante.

Per il corollario precedente, V_{λ_j} ha una base di autovettori di B; mettendo insieme tutte queste basi si ottiene una base di V di autovettori di B, perché i V_{λ_j} decompongono V in somma diretta. Quindi la base ottenuta è di autovettori sia per A che per B _

($\Longrightarrow$) Osserviamo intanto che due matrici diagonali (dello stesso ordine) commutano sempre.

Quindi se $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $\quad P^{-1}AP = D_1$

$P^{-1}BP = D_2$

allora

$$AB = PD_1P^{-1}PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1}$$

$$BA = PD_2P^{-1}PD_1P^{-1} = PD_2D_1P^{-1}$$

e siccome $D_1D_2 = D_2D_1$ si conclude.

Applicazioni bilineari.

Siano U, V, W sp. vettoriali su $\mathbb{K}$. Un'applicazione

$$\varphi : U \times V \longrightarrow W$$

si dice <u>bilineare</u> se

$$\varphi(\alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2, \underline{v}) = \alpha_1 \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}) + \alpha_2 \varphi(\underline{u}_2, \underline{v}) \quad ;$$

$$\varphi(\underline{u}, \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2) = \beta_1 \varphi(\underline{u}, \underline{v}_1) + \beta_2 \varphi(\underline{u}, \underline{v}_2)$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}, \quad \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U, \quad \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V.$$

L'insieme $\mathrm{Bil}(U \times V; W)$ di tutte le applicazioni bilineari forma uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove se $\varphi, \psi \in \mathrm{Bil}(U \times V; W)$

$(\varphi + \psi)(\underline{u}, \underline{v}) = \varphi(\underline{u}, \underline{v}) + \psi(\underline{u}, \underline{v})$; $\quad (\alpha \varphi)(\underline{u}, \underline{v}) = \alpha\, \varphi(\underline{u}, \underline{v})$ [esercizio!]

<u>Esempio</u>. Il prodotto righe $\times$ colonne

$$\varphi : (A, B) \longrightarrow AB$$

è bilineare:

$$\varphi \in \mathrm{Bil}\left(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{nl}(\mathbb{K})\, ;\ \mathcal{M}_{ml}(\mathbb{K})\right)$$

Siano $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ base di U, $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V. Se $\underline{u} = x_1 \underline{u}_1 + \dots + x_m \underline{u}_m$, $\underline{v} = y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n$, allora applicando la definizione

linearità nella I componente

$$\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = \varphi(x_1 \underline{u}_1 + \dots + x_m \underline{u}_m,\ y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n) = x_1 \varphi(\underline{u}_1, y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n) +$$

$$\dots + x_m \varphi(\underline{u}_m, y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n) =$$

linearità nella II componente

$$= x_1 y_1 \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}_1) + x_1 y_2 \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}_2) + \dots + x_1 y_n \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}_n) + x_2 y_1 \varphi(\underline{u}_2, \underline{v}_1) + \dots +$$

$$+ x_2 y_n \varphi(\underline{u}_2, \underline{v}_n) + \dots \dots \dots + x_m y_1 \varphi(\underline{u}_m, \underline{v}_1) + \dots + x_m y_n \varphi(\underline{u}_m, \underline{v}_n) =$$

[che possiamo riscrivere come una sommatoria]

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(\underline{u}_i, \underline{v}_j) \qquad (1)$$

Quindi φ è univocamente determinata dalla conoscenza della lista di mn vettori $\underline{w}^{(ij)} = \varphi(\underline{u}_i, \underline{v}_j) \in W$ (che può avere ripetizioni). Viceversa assegnata comunque una lista ordinata di mn vettori $\underline{w}^{(ij)} \in W$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, la (1) sopra definisce un'appl. bilineare $\varphi : U \times V \to W$.

Se a $\varphi, \psi \in Bil(U \times V; W)$ corrispondono le liste ordinate $\{\underline{w}^{(ij)}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ e $\{\underline{w}'^{(ij)}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, alla combinazione

$\alpha\varphi + \beta\psi$ corrisponde la lista $\{\alpha\,\underline{w}^{(ij)} + \beta\,\underline{w}'^{(ij)}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

Quindi l'associazione $\varphi \longrightarrow \{\varphi(\underline{u}_i, \underline{v}_j)\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ è un isomorfismo tra $Bil(U \times V, W)$ e W^{mn}

e quindi $\dim Bil(U \times V, W) = mnp$, $p = \dim W$.

Esercizio. Se $\mathcal{B}'' = \{ \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_p \}$ è una base di W, allora una base di $Bil(U \times V, W)$ è data dalle mnp applicazioni:

$$\varphi^{(\alpha\beta\gamma)} : U \times V \to W \quad \text{con} \quad \varphi^{(\alpha\beta\gamma)}(\underline{u}_i, \underline{v}_j) = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \underline{w}_\gamma$$

$\alpha = 1, \dots, m; \ \beta = 1, \dots, n; \ \gamma = 1, \dots, p.$

Ci interesseremo da ora in poi solo al caso $U = V$, $W = \mathbb{K}$.

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \in Bil(V; \mathbb{K})$$

Di particolare rilievo sono le applicazioni bilineari che hanno ulteriori proprietà, tra queste possiamo distinguere:

1) $\mathrm{Sim}(V) \subset \mathrm{Bil}(V)$ sono le applicazioni bilineari <u>simmetriche</u>, cioè: $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) \quad , \forall\ \underline{u}, \underline{v} \in V$

che si chiameranno anche PRODOTTI SCALARI

<u>Esempi</u> 1) $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

detto il PRODOTTO SCALARE CANONICO

2) $V = M_n(\mathbb{K})$, $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ dato da $\varphi(A, B) = tr(AB)$

oppure $\varphi(A, B) = tr({}^tAB)$.

3) $V = \mathbb{K}_n[x]$, $\varphi(p(x), q(x)) = p(0) \cdot q(0)$, oppure

$\varphi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx$; oppure $\varphi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} x\, p(x) q(x)\, dx$.

4) $V = \mathbb{K}^n$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, A matrice simmetrica $A = {}^tA$;

$\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ dato da:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = [x_1 \cdots x_n]\, A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

brevemente $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$

è uguale al suo trasposto essendo un numero

Si verifica subito: $\varphi(\underline{y}, \underline{x}) = {}^t\underline{y} A \underline{x} = {}^t({}^t\underline{y} A \underline{x}) = {}^t\underline{x}\, {}^tA\, \underline{y} =$

$= {}^t\underline{x} A \underline{y} = \varphi(\underline{x}, \underline{y})$

A simmetrica

$\leadsto$ se $A = I$ φ è il prodotto canonico

2) $\mathrm{Antisim}(V) \subset \mathrm{Bil}(V)$ sono le applicazioni bilineari antisimmetriche, cioè $\varphi(\underline{u},\underline{v}) = -\varphi(\underline{v},\underline{u})$ $\forall\, \underline{u},\underline{v} \in V$ (da cui segue $\varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0$, $\forall\, \underline{v} \in V$)

Esempi 1) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1$

2) $V = \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice antisimmetrica ${}^tA = -A$

(segue $a_{ii} = 0$, $i = 1, \cdots, n$) $\quad \varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ dato da

$\varphi(\underline{x},\underline{y}) = {}^t\underline{x}\, A\, \underline{y}$