Breve soluzione esercizio del compitino

1) $\varphi_{\underline{a}}(p(x), p(x)) = \sum_{i=0}^{3} a_i (p(i))^2 \geq 0$ in quanto $a_i > 0$.

Inoltre se $\bar{e} = 0$ allora $p(i) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Ma l'unico polinomio di grado ≤ 3 che si annulla in 4 punti è il polinomio nullo.

2) Per Ruffini se $p(x) \in W_0$ allora $p(x)$ è divisibile per $p_0 = (x-1)(x-2)(x-3)$, e quindi $p(x) = \alpha p_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Quindi p_0 è una base di W_0 che ha dim $= 1$.

Analogamente,

$p_1 = x(x-2)(x-3)$ è base di W_1,

$p_2 = x(x-1)(x-3)$ è base di W_2;

$p_3 = x(x-1)(x-2)$ è base di W_3.

3) Se $i \neq j$, $\varphi_{\underline{a}}(p_i, p_j) = 0$ perché per ogni $K \in \{0, \dots, 3\}$ almeno uno tra $p_i(x), p_j(x)$ si annulla in K.

Quindi $p_0, \dots, p_3$ è base ortogonale e $W_i = \mathrm{Span}(p_i) \perp W_j = \mathrm{Span}(p_j)$.

4) Per Sylvester, $\iota_+(\varphi_{\underline{a}}) = \#\{h \mid \varphi_{\underline{a}}(p_h, p_h) > 0\} =$

$= \#\{K \mid \sum_{i=0}^{3} a_i\, p_K(i)\, p_h(i) = a_K (p_h(K))^2 > 0\} =$

$= \#\{h \mid a_h > 0\}$.

Similmente $i_-(\varphi_{\underline{a}}) = \#\{n \mid a_n < 0\}$ e

$$i_0(\varphi_{\underline{a}}) = \#\{n \mid a_n = 0\}$$

5) Applichiamo la definizione di simmetria ai polinomi $1, x$:

$$\varphi_{\underline{a}}(f(1), x) = \varphi_{\underline{a}}\left(\frac{d}{dx}(1), x\right) = \varphi_{\underline{a}}(0, x) = 0$$

$$\varphi_{\underline{a}}(1, f(x)) = \varphi_{\underline{a}}\left(1, \frac{d}{dx}x\right) = \varphi_{\underline{a}}(1, 1) > 0$$

$\forall\, \underline{a}$ tale che $a_i > 0$ $(i = 0, \dots, 3)$.

Quindi f non può essere simmetrico per nessun $\underline{a}$ con a_i tutti positivi.