Soluzioni Primo Compitino Geometria (Corso A)

Mattia Puddu
mattiapuddu@icloud.com

17 dicembre 2019

Parte I

1. Scrivere in forma trigonometrica le radici del polinomio $p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

Risoluzione Dalla relazione

$$z^5 - 1 = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(z - 1)$$

abbiamo che le radici del polinomio $p(z)$ sono le radici quinte dell'unità diverse da 1. Le radici quinte dell'unità sono date, al variare di $k = 0, 1, 2, 3, 4$, da

$$\zeta_k = \mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{5}} = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}.$$

Di conseguenza, le radici del polinomio $p(z)$ sono (scritte in forma trigonometrica)

$$\zeta_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} \qquad \zeta_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$
$$\zeta_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} \qquad \zeta_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

✓

2. Dato il piano $\pi : x - y + 2z = 1$ ed i punti $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (2, 0, -1)$:

   a) Trovare un'equazione parametrica per π.

   b) Trovare un'equazione parametrica per la retta r passante per P_1 e P_2.

   c) Dimostrare che r è parallela a π.

   d) Trovare la distanza tra r e π.

Risoluzione a) Cerchiamo una base dello spazio vettoriale $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$ descritto dall'equazione $x - y + 2z = 0$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z\} \\ &= \{(y - 2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Span}\,((1, 1, 0), (-2, 0, 1))\end{aligned}$$

Inoltre osserviamo che il punto $(1, 0, 0)$ appartiene al piano. Di conseguenza, un'equazione parametrica per π è

$$\pi(s, t) = (1, 0, 0) + s(1, 1, 0) + t(-2, 0, 1) \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

b) Un'equazione parametrica per la retta r passante per P_1 e P_2 è

$$\begin{aligned} r(t) &= P_1 + t(P_2 - P_1) \\ &= (1,1,0) + t(1,-1,-1) \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

c) Con le notazioni usate nei due punti precedenti, basta osservare che $(1,-1,-1) \in \mathcal{W}$.

d) Dato un piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ e una retta in $\mathbb{R}^3$ parallela al piano, per calcolare la loro distanza è sufficiente prendere un punto qualsiasi (x_0, y_0, z_0) della retta e calcolare la distanza di tale punto dal piano. Tale distanza è data da

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Nel nostro caso, si ha $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$, $d = -1$ e un punto della retta è $P_1 = (1,1,0)$: la distanza cercata è

$$\delta = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

✓

3. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{Span}\left((3,11,5,2),(1,5,2,1),(1,1,1,0)\right) \\ V_2 &= \operatorname{Span}\left((1,3,2,2),(1,3,4,1),(2,6,2,5)\right) \end{aligned}$$

a) Trovare la dimensione di V_1 e V_2.

b) Dire se V_1 e V_2 sono in somma diretta, e in tal caso se $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$.

Risoluzione a)

$\underline{\dim V_1}$ Calcoliamo la dimensione di V_1 : osserviamo che $\dim V_1 \geq 2$, in quanto i vettori $v_1 = (1,5,2,1)$ e $v_2 = (1,1,1,0)$ sono linearmente indipendenti (non sono nulli, e non sono uno un multiplo dell'altro). D'altra parte, è facile osservare che

$$(3,11,5,2) = v_3 = 2v_1 + v_2,$$

dunque il vettore v_3 è superfluo e $\{v_1, v_2\}$ è un sistema minimale di generatori per V_1. Di conseguenza, $\dim V_1 = 2$.

$\underline{\dim V_2}$ Calcoliamo la dimensione di V_2 : in modo analogo al caso precedente, osserviamo che $\dim V_2 \geq 2$, in quanto i vettori $w_1 = (1,3,2,2)$ e $w_2 = (1,3,4,1)$ sono linearmente indipendenti. D'altra parte, è facile osservare che

$$(2,6,2,5) = w_3 = 3w_1 - w_2,$$

dunque il vettore w_3 è superfluo e $\{w_1, w_2\}$ è un sistema minimale di generatori per V_2. Di conseguenza, $\dim V_2 = 2$.

b) Proviamo che V_1 e V_2 sono in somma diretta. Per il punto precedente,

$$\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{Span}\left((1,5,2,1),(1,1,1,0)\right) \\ V_2 &= \operatorname{Span}\left((1,3,2,2),(1,3,4,1)\right) \end{aligned}$$

Sia $v \in V_1 \cap V_2$: allora esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il vettore (a, b, c, d) appartiene al nucleo della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Riduciamo a scala la matrice A :

$$A \overset{\substack{R_2-5R_1 \\ R_3-2R_1 \\ R_4-R_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_4}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-4R_2}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_4-6R_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Dato che la matrice ridotta a scala ha quattro pivot non nulli, il nucleo della matrice A contiene solo il vettore nullo: dunque $V_1 \cap V_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e i sottospazi vettoriali V_1 e V_2 sono in somma diretta. Infine, dato che $\dim V_1 \oplus V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 = 2 + 2 = 4$ si ha necessariamente $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$.

✓

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ definito da

$$V = \{M \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R}) : AM = 0\}.$$

Trovare:

a) Una base $\mathcal{B}$ per $\operatorname{Ker}(A)$.

b) La dimensione di V.

c) Una base per lo spazio delle matrici simmetriche di V.

<u>Risoluzione</u> a) Riduciamo a scala la matrice A :

$$A \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_3+R_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che la matrice ridotta a scala ha due pivot non nulli, il nucleo della matrice è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3 - 2 = 1$. Inoltre, dato $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si ha che $(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(A)$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2z \\ x=z-y=-z \end{cases}$$

e dunque

$$\operatorname{Ker}(A) = \{(-z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}((-1,2,1)).$$

Una base per $\operatorname{Ker}(A)$ è $\mathcal{B} = \{(-1,2,1)\}$.

b) Sia $M \in V$. Denotando con $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ ed $M^{(3)}$ le tre colonne di M, tali colonne devono soddisfare le relazioni

$$AM^{(1)} = AM^{(2)} = AM^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si trova subito che $M \in V$ se e solo se $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)} \in \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Span}((-1,2,1))$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} -x & -y & -z \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

e $\dim V = 3$.

c) Una matrice in V è simmetrica se e solo se i tre parametri x, y, z verificano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 2x = -y \\ x = -z \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2x = 2z \end{cases}$$

Denotando con $\mathcal{S}(3,\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(3,\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche, si ha dunque

$$V \cap \mathcal{S}(3,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -2z & -z \\ -2z & 4z & 2z \\ -z & 2z & z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Una base di $V \cap \mathcal{S}(3,\mathbb{R})$ è data da

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

✓

5. Dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x, x+y, x+y+z) \end{array}$$

trovare:

a) La matrice associata ad f rispetto alla base canonica (in partenza ed arrivo).

b) Dire se f è un isomorfismo.

c) Se f è un isomorfismo, calcolare f^{-1}.

Risoluzione a) Denotiamo con $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e poniamo $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Dato che

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,1,1) \\ f(e_2) &= (0,1,1) \\ f(e_3) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

la matrice associata all'applicazione f rispetto alla base canonica (in partenza ed arrivo) è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Essendo f un endomorfismo, per verificare se è un isomorfismo è sufficiente verificare se è iniettivo. Si verifica facilmente che f è iniettivo: se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è tale che $f(x,y,z) = 0$, allora

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Si trova facilmente che l'inversa di f è data da

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x, y-x, z-y) \end{array}$$

(in questo caso, è facile costruire a mano l'inversa di f : in generale si può usare il fatto che, fissata una base $\mathcal{B}_1$ in partenza ed una base $\mathcal{B}_2$ in arrivo,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f^{-1})$$

e ricostruire f a partire dal comportamento di quest'ultima sulla base $\mathcal{B}_1$, che è dato, in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}_2$ dalle colonne di questa matrice).

✓

Parte II

Siano W_1, W_2 piani distinti passanti per l'origine di $\mathbb{R}^3$ e W_3 una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$. Per un fissato $i \in \{1,2,3\}$, consideriamo lo spazio degli endomorfismi

$$F_i = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) : f(W_i) \subseteq W_i \right\}.$$

Calcolare (al variare delle posizioni relative dei sottospazi):

a) $\dim(F_i)$ al variare di $i = 1,2,3$.

b) $\dim(F_i \cap F_j)$ al variare di $i,j = 1,2,3$ (con $i < j$)

c) $\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$.

Risoluzione Come noto, un'applicazione lineare è determinata dalle immagini dei vettori di una data base. Fissando delle opportune basi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ di $\mathbb{R}^3$, possiamo calcolare agevolmente le dimensioni di tali spazi di applicazioni lineari facendo corrispondere a queste ultime le matrici associate rispetto alle basi fissate, mediante l'isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) & \to & \mathcal{M}(3,\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \end{array}$$

Siano $v_1, v_2, w_1, w_2, z \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{z\}$ siano rispettivamente una base di W_1, W_2 e W_3.

a)

$\underline{\dim F_1}$ Completiamo $\mathcal{B}_1$ a base di $\mathbb{R}^3$, e sia dunque $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, u\}$ una base di $\mathbb{R}^3$: se $f \in F_1$ allora si deve avere

$$f(v_1) \in \operatorname{Span}(v_1, v_2)$$
$$f(v_2) \in \operatorname{Span}(v_1, v_2)$$

mentre non ci sono vincoli su $f(u)$: in altri termini, la matrice associata a una generica $f \in F_1$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in partenza ed arrivo) è della forma

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ per ogni possibile scelta di i, j. Dato che ci sono 7 parametri liberi, si ricava che $\dim F_1 = 7$.

$\underline{\dim F_2}$ In modo del tutto analogo al punto precedente, anche $\dim F_2 = 7$.

$\underline{\dim F_3}$ Completiamo $\mathcal{B}_3$ a base di $\mathbb{R}^3$, e sia dunque $\mathcal{B} = \{z, u, v\}$ una base di $\mathbb{R}^3$: se $f \in F_3$ allora si deve avere

$$f(z) \in \operatorname{Span}(z)$$

mentre non ci sono vincoli su $f(u), f(v)$: in altri termini, la matrice associata a una generica $f \in F_3$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ per ogni possibile scelta di i, j. Dato che ci sono 7 parametri liberi, si ricava che $\dim F_3 = 7$.

b)

$\underline{\dim (F_1 \cap F_2)}$ Per definizione,

$$F_1 \cap F_2 = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) : f(W_1) \subseteq W_1,\ f(W_2) \subseteq W_2 \right\}.$$

Essendo W_1, W_2 piani distinti in $\mathbb{R}^3$, si ricava facilmente che $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$: sia $\mathcal{D} = \operatorname{Span}(u)$ una base di $W_1 \cap W_2$, ed estendiamola ad una base $\mathcal{D}_1 = \{u, v\}$ di W_1 e ad una base $\mathcal{D}_2 = \{u, w\}$ di W_2. Allora $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e se $f \in F_1 \cap F_2$ allora si deve avere

Per la prima, si ha
$u \in W_1 \cap W_2$
$f(u) \in f(W_1) \cap f(W_2) \subseteq W_1 \cap W_2$

$$f(u) \in \operatorname{Span}(u)$$
$$f(v) \in \operatorname{Span}(u, v)$$
$$f(w) \in \operatorname{Span}(u, w)$$

In altri termini, la matrice associata a una generica $f \in F_1 \cap F_2$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ per ogni possibile scelta di i, j. Dato che ci sono 5 parametri liberi, si ricava che $\dim(F_1 \cap F_2) = 5$.

$\underline{\dim(F_1 \cap F_3)}$ Per definizione,

$$F_1 \cap F_3 = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) : f(W_1) \subseteq W_1,\ f(W_3) \subseteq W_3 \right\}.$$

Distinguiamo due casi, a seconda che la retta W_3 sia contenuta o meno in W_1 :

$\underline{W_3 \cap W_1 = \{0\}}$ In tal caso $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, z\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Se $f \in F_1 \cap F_3$ allora

$$\begin{gathered} f(v_1) \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \\ f(v_2) \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \\ f(z) \in \operatorname{Span}(z) \end{gathered}$$

In altri termini, la matrice associata a una generica $f \in F_1 \cap F_3$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ per ogni possibile scelta di i, j. Dato che ci sono 5 parametri liberi, si ricava che $\dim(F_1 \cap F_3) = 5$.

$\underline{W_3 \subset W_1}$ In tal caso, completiamo $\mathcal{B}_3$ a una base $\{z, u\}$ di W_1, e completiamo quest'ultima a una base $\mathcal{B} = \{z, u, v\}$ di $\mathbb{R}^3$. Se $f \in F_1 \cap F_3$ allora

$$\begin{gathered} f(z) \in \operatorname{Span}(z) \\ f(u) \in \operatorname{Span}(z, u) \end{gathered}$$

mentre non ci sono vincoli su $f(v)$. In altri termini, la matrice associata a una generica $f \in F_1 \cap F_3$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ per ogni possibile scelta di i, j. Dato che ci sono 6 parametri liberi, si ricava che $\dim(F_1 \cap F_3) = 6$.

$\underline{\dim(F_2 \cap F_3)}$ Del tutto analogo al punto precedente:

$$\dim(F_2 \cap F_3) = \begin{cases} 5 & \text{se } W_2 \cap W_3 = \{(0,0,0)\} \\ 6 & \text{se } W_3 \subset W_2 \end{cases}$$

c) Per definizione,

$$F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) : f(W_1) \subseteq W_1,\ f(W_2) \subseteq W_2,\ f(W_3) \subseteq W_3 \right\}$$

Distinguiamo anche qui dei casi:

$W_3 = W_1 \cap W_2$

In tal caso, completiamo $\mathcal{B}_3$ a una base $\{z,u\}$ di W_1 e a una base $\{z,v\}$ di W_2. Dunque $\mathcal{B} = \{z,u,v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e analogamente ai punti precedenti, se $f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ allora

$$\begin{aligned} f(z) &\in \operatorname{Span}(z) \\ f(u) &\in \operatorname{Span}(z,u) \\ f(v) &\in \operatorname{Span}(z,v) \end{aligned}$$

In altri termini, la matrice associata a una generica $f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ per ogni possibile scelta di i,j. Dato che ci sono 5 parametri liberi, si ricava che $\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 5$.

$W_3 \subset W_1$ **e** $W_3 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$

Sia $\mathcal{D} = \{u\}$ una base di $W_1 \cap W_2$: dato che la retta W_3 non è contenuta nel piano W_2, sicuramente i vettori u, z sono linearmente indipendenti, dunque $\{u,z\}$ è una base di W_1. Completando $\mathcal{D}$ a una base $\{u,v\}$ di W_2 abbiamo che $\mathcal{B} = \{u,z,v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Se $f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ allora

$$\begin{aligned} f(u) &\in \operatorname{Span}(u) \\ f(z) &\in \operatorname{Span}(z) \\ f(v) &\in \operatorname{Span}(u,v) \end{aligned}$$

In altri termini, la matrice associata a una generica $f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ per ogni possibile scelta di i,j. Dato che ci sono 4 parametri liberi, si ricava che $\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 4$.

$W_3 \subset W_2$ **e** $W_3 \cap W_1 = \{(0,0,0)\}$

Del tutto analogo al caso precedente: $\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 4$.

$W_3 \cap (W_1 \cap W_2) = \{(0,0,0)\}$

Sia $\mathcal{D} = \{u\}$ una base di $W_1 \cap W_2$. Possiamo completare $\mathcal{D}$ a una base $\{u,v\}$ di W_1 e a una base $\{u,w\}$ di W_2 in modo tale che $\mathcal{B} = \{u,v,w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e $z = u+v+w$. Se $f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ allora sicuramente $f \in F_1 \cap F_2$ e dunque devono valere le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} f(u) \in \operatorname{Span}(u) &\Leftrightarrow f(u) = a_{1,1}u \quad (a_{1,1} \in \mathbb{R}) \\ f(v) \in \operatorname{Span}(u,v) &\Leftrightarrow f(v) = a_{1,2}u + a_{2,2}v \quad (a_{1,2}, a_{2,2} \in \mathbb{R}) \\ f(w) \in \operatorname{Span}(u,w) &\Leftrightarrow f(w) = a_{1,3}u + a_{3,3}w \quad (a_{1,3}, a_{3,3} \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Questa volta i parametri $a_{i,j}$ non sono liberi, in quanto dobbiamo imporre l'ulteriore condizione su F_3, ovvero

$$\begin{aligned} f(z) = f(u+v+w) &= f(u) + f(v) + f(w) \\ &= (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3})u + a_{2,2}v + a_{3,3}w \in \operatorname{Span}(z) = \operatorname{Span}(u+v+w) \end{aligned}$$

da cui si ricavano le relazioni

$$\begin{cases} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = a_{2,2} \\ a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = a_{3,3} \end{cases}$$

In altri termini, la matrice associata a una generica $f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ per ogni possibile scelta di i, j. Dato che ci sono 3 parametri liberi, si ricava che $\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 3$.

✓