CORSO di LAUREA in FISICA – GEOMETRIA I
Compito del 30/5/2013, A. A. 2012/2013

Esercizio 1

Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(1) Sia $A \in M(n,\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora esiste $B \in M(n,\mathbb{R})$ simmetrica tale che $A+B$ è definita positiva.

(2) Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare non nulla e siano U_1, U_2 sottospazi vettoriali distinti di V. Se $\dim f(U_i) = \dim U_i$ per $i = 1, 2$, allora $\dim f(U_1 + U_2) = \dim(U_1 + U_2)$.

(3) Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $f \in End(V)$. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$ è simmetrica.

(4) Sia Φ un prodotto scalare non degenere su uno spazio vettoriale reale V e sia $v \in V$ un vettore isotropo. Allora esiste $w \in V$ tale che il sottospazio $H = \mathrm{Span}(v, w)$ ha dimensione 2 e la matrice associata a $\Phi|_H$ rispetto alla base $\{v, w\}$ è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2

Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f_h(X) = A_h X$ dove

$$A_h = \begin{pmatrix} h+1 & 2 & h+5 & 0 \\ h & 1 & 2 & h \\ h & h & 3h+1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3,4,\mathbb{R})$$

(1) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si calcoli $\dim \mathrm{Im}\, f_h$.

(2) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\mathrm{Im}\, f_h$ è isomorfo a $\mathrm{Ker}\, f_h$.

(3) Scelto un valore di $h \in \mathbb{R}$ per cui f_h non è surgettiva, si determinino equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}\, f_h$.

(4) Sia $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z = 0\}$. Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^4 = H \oplus \mathrm{Ker}\, f_h$.

Esercizio 3

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} k & k-1 & 0 \\ 1-k & 2-k & 0 \\ 2k-3 & 2k-1 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f_A(X) = AX \quad \forall X \in \mathbb{R}^3$.

(a) Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che f_A è diagonalizzabile.

(b) Fissato un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui f_A è diagonalizzabile, si costruisca, se esiste, un prodotto scalare Φ definito positivo su $\mathbb{R}^3$ tale che f_A sia simmetrica rispetto a Φ.

(c) Si determini una base dell'ortogonale (rispetto a Φ) del sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(4, 1, 2)$.