CORSO di LAUREA in FISICA – GEOMETRIA I
Compito del 24/6/2013, A. A. 2012/2013

Esercizio 1
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(1) Sia V uno spazio vettoriale e sia $f \in End(V)$. Allora
$$\dim \mathrm{Im}(f^2) = \dim \mathrm{Im}\, f \iff V = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f.$$

(2) Sia Φ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ tali che $\Phi(v_i, v_j) = 0$ per ogni $i \neq j$. Allora esiste uno e un solo isomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ tale che $f(v_i) = e_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

(3) Sia V uno spazio vettoriale reale, $\dim V = 2$, e sia $\{v_1, v_2\}$ una base di V. Sia Φ un prodotto scalare su V tale che $\Phi(v_1, v_1) > 0$, $\Phi(v_2, v_2) > 0$ e $\Phi(v_2 - v_1, v_2 - v_1) > 0$. Allora Φ è definito positivo.

(4) Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Se $\det A \neq 0$, allora A^2 è congruente alla matrice identica $I \in M(n, \mathbb{R})$.

Esercizio 2
Sia $E = \{f \in End(M(2, \mathbb{R})) \mid {}^t(f(A)) = -f({}^tA) \quad \forall A \in M(2, \mathbb{R}),\ \ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

(a) Si esibisca esplicitamente, se esiste, $f \in E$ tale che $\mathrm{Im}\, f = Span\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Si provi che ogni $f \in E$ non è iniettiva.

(c) Sia $f \in E$ e sia M la matrice associata a f in una base $\mathcal{B}$ di $M(2, \mathbb{R})$. Si verifichi che, se $\mathrm{tr}(M^2) > 0$, allora f è diagonalizzabile.

Esercizio 3
Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[t]$ si consideri il prodotto scalare Φ definito da
$$\Phi(p, q) = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}_2[t].$$

(a) Si calcoli la segnatura di Φ.

(b) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}_2[t]$ di dimensione 2 tale che la restrizione di Φ a W abbia segnatura $(1, 0, 1)$.

(c) Si determini l'ortogonale (rispetto a Φ) del sottospazio $U = \{p \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(1) + p(2) = 0\}$.

(d) Si determini (o si dimostri che non può esistere) un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}_2[t]$ tale che $\dim W = 2$, $\Phi|_W$ è degenere e $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}_2[t]$.