CORSO di LAUREA in FISICA – GEOMETRIA I
Compito del 4/9/2013, A. A. 2012/2013

Esercizio 1
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(a) Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$. Se esiste $B_1 \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema lineare $AX = B_1$ ha più di una soluzione, allora esiste $B_2 \in \mathbb{R}^n$ tale che $AX = B_2$ non ha soluzione.

(b) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare non nulla e sia U un sottospazio vettoriale di V, con $\dim U \geq 1$. Allora
$$\dim \operatorname{Im} f = \dim f(U) + \dim V - \dim U.$$

(c) Se $A \in M(n, \mathbb{R})$ è simmetrica, allora la matrice $A - i\, I_n \in M(n, \mathbb{C})$ è invertibile (dove I_n denota la matrice identica $n \times n$).

(d) Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica e sia $i_-(\psi_A)$ l'indice di negatività del prodotto scalare ψ_A su $\mathbb{R}^n$ associato ad A rispetto alla base canonica. Sia $m \geq 2$ un numero naturale. Se $i_-(\psi_A) \geq 1$ e le matrici A e A^m sono congruenti, allora m è dispari.

Esercizio 2
Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 antisimmetriche e sia Φ il prodotto scalare su V definito da $\Phi(X, Y) = \operatorname{tr}({}^t XY)$ per ogni $X, Y \in V$. Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica.

(a) Si verifichi che $AX + XA \in V$ per ogni $X \in V$.

(b) Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(X) = AX + XA$ per ogni $X \in V$. Si verifichi che f è simmetrica rispetto a Φ.

(c) Fissata $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, si determini una base di V ortonormale rispetto a Φ e di autovettori per f.

Esercizio 3
Sia (V, Φ) uno spazio euclideo. Per ogni sottospazio vettoriale U di V si indichi con $p_U : V \to V$ la proiezione ortogonale su U (indotta dalla decomposizione $V = U \oplus U^\perp$).

(a) Si dimostri che p_U è simmetrica (rispetto a Φ) per ogni sottospazio U.

(b) Si dimostri che, dati U e W sottospazi vettoriali di V, si ha $p_U \circ p_W = 0$ se e solo se $p_W \circ p_U = 0$.

(c) Si dimostri che, se U e W sono sottospazi vettoriali di V tali che $p_U \circ p_W = 0$, allora $p_U + p_W = p_{U+W}$.

(d) Si consideri il caso particolare in cui $V = M(2, \mathbb{R})$ e Φ è il prodotto scalare su V definito da $\Phi(X, Y) = \operatorname{tr}({}^t XY)$ per ogni $X, Y \in V$. Se $U = S(2)$ è il sottospazio di V formato dalle matrici simmetriche, si determini $U^\perp$ e un sottospazio W di V di dimensione positiva tale che $p_U \circ p_W = 0$. Si dica inoltre se tale W è unico.