CORSO di LAUREA in FISICA – GEOMETRIA I
Secondo compitino, 15/5/2013, A. A. 2012/2013

Esercizio 1
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(1) Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori reali di $A \in M(n, \mathbb{R})$. Si supponga che $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k)$ e che, per ogni $i \neq j$, gli autospazi $V(\lambda_i)$ e $V(\lambda_j)$ siano ortogonali (rispetto al prodotto scalare ordinario). Allora A è simmetrica.
(2) Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione $f(x, y) = 0$ e sia $\mathcal{F}$ la famiglia di coniche di $\mathbb{R}^2$ di equazione $f(x, y) - t(x^2 + y^2 + 1) = 0$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Allora $\mathcal{F}$ contiene almeno una conica degenere.
(3) Siano $A, B, A_1, B_1 \in M(n, \mathbb{R})$ matrici simmetriche, con $n \geq 2$. Se A, B sono congruenti e A_1, B_1 sono congruenti, allora $A + A_1$ e $B + B_1$ sono congruenti.
(4) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, con $n \geq 2$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di $A + B$. Allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ autovalore per A ed esiste β autovalore per B tale che $\lambda = \alpha + \beta$.

Esercizio 2
Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 antisimmetriche e sia Φ il prodotto scalare su V definito da $\Phi(X, Y) = \operatorname{tr}({}^tXY)$ per ogni $X, Y \in V$. Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica.
(a) Si verifichi che $AXA \in V$ per ogni $X \in V$.
(b) Sia $f \colon V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(X) = AXA$ per ogni $X \in V$. Si verifichi che f è simmetrica rispetto a Φ.
(c) Fissata $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si determini una base di V ortonormale rispetto a Φ e di autovettori per f.

Esercizio 3. Sia Φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
(a) Si determinino la segnatura di Φ ed equazioni cartesiane del radicale di Φ.
(b) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale H di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim H = 3$ e $\dim H^\perp = 2$.
(c) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim U = 3$ e la restrizione di Φ a U è il prodotto scalare nullo.
(d) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim W = 3$ e la restrizione di Φ a W ha segnatura $(1, 0, 2)$.