**CORSO di LAUREA in FISICA – GEOMETRIA I**
**Primo compitino, 12/12/2012, A. A. 2012/2013**

**Esercizio 1**
Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(1) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$. Se $A^2$ è SD-equivalente a $B^2$, allora $A$ è SD-equivalente a $B$.

(2) Siano $V, W, Z$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Siano $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to Z$ applicazioni lineari. Allora
$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g.$$

(3) Sia $H$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2. Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ vettori linearmente indipendenti tali che $v_1 \notin H$ e $v_2 \notin H$. Allora $\mathbb{R}^4 = H \oplus Span(v_1, v_2)$.

(4) Se $A \in M(2, 3, \mathbb{R})$, $B \in M(3, 2, \mathbb{R})$ e $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 2$, allora $AB$ è invertibile.

**Esercizio 2**
Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(2, 0, 1, -2), (0, 1, 0, -1), (4, -3, 2, -1)$.

Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f(X) = A_h X$ dove
$$A_h = \begin{pmatrix} h & 0 & 3-h & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1+h \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 1-h & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Si determinino una base di $W$ ed equazioni cartesiane per $W$.

(2) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $f_h(W) \subseteq W$.

(3) Sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = 0\}$. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si calcoli la dimensione del sottospazio $f_h(U)$.

(4) Si dica se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\operatorname{Im} f_h$ è isomorfo a $W$.

**Esercizio 3**
Posto $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sia $W = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0, \operatorname{tr}(AM) = 0\}$ (dove tr denota la traccia).

(1) Si verifichi che $W$ è un sottospazio vettoriale di $M(2, \mathbb{R})$ e si determini una base di $W$.

(2) Sia $S(2)$ il sottospazio di $M(2, \mathbb{R})$ costituito dalle matrici simmetriche. Si costruisca, se esiste, un'applicazione lineare $f\colon M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ che verifichi le seguenti proprietà:

(i) $W \cap S(2) \subseteq \operatorname{Ker} f$

(ii) $\dim \operatorname{Im} f = 2$

(iii) $(1, 2, 1) \in \operatorname{Im} f$

e si calcoli $f\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.