Compito di Geometria I - 16/9/2016

Nome e cognome (stampatello) ....
matricola..............................

I parte (riempire dove richiesto). **Attenzione**: *ogni domanda esatta punti* $1,5$*; ogni domanda errata* -1 *(totale di questa parte: 16,5 punti).* **Occorre ottenere almeno** 4 **punti in questa parte** *altrimenti il compito sarà considerato totalmente insufficiente (la parte successiva non verrà guardata).*

1) Dati i punti $P_1 \equiv (1,-1,0), P_2 \equiv (1,0,-1), P_3 \equiv (0,1,-1)$:

a) scrivere un'equazione cartesiana del piano Π passante per i tre punti P_1, P_2, P_3 :

Π : ....;

b) Calcolare il coseno dell'angolo α che il piano Π forma col piano xy.

$cos(\alpha) =$ ....

c) Scrivere l'equazione parametrica della retta intersezione di Π col piano xy

$$r = \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$$

2) Completare le seguenti matrici a matrici diagonalizzabili sul campo specificato:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{su } \mathbb{R}; \quad M = \begin{bmatrix} 0 & i \\ \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{su } \mathbb{C}; \quad M = \begin{bmatrix} i & \dots & 0 \\ 0 & i & i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{su } \mathbb{C}$$

3) Dire se V è uno spazio vettoriale e se sì indicarne la dimensione:

1. $V = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ M^2 = 0\}$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$ $dim(V) =$ ....
2. $V = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ tr(M) = 0\}$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$ $dim(V) =$ ....
3. $V = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ dim(ker(M)) \geq 2\}$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$ $dim(V) =$ ....

3) Al variare di α in $\mathbb{R}$, scrivere la segnatura del prodotto scalare avente come matrice (in una fissata base) la $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}$

$\sigma(A) =$ ....
....

4 Scrivere tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = \frac{1}{z^2}$

$z =$ ....

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

II parte (risolvere su un foglio: fogli diversi per esercizi diversi.)

Esercizio 1. Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e sia $A_\theta = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ sen(\theta) & -cos(\theta) \end{bmatrix}$. Sia T_θ l'endomorfismo di V definito da

$$T_\theta(X) \ = \ A_\theta X$$

1. Calcolare la matrice associata a T_θ rispetto alla base canonica di V.

2. Dimostrare che T_θ è sempre diagonalizzabile e determinarne una base di autovettori.

Esercizio 2. Dati $a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sia $A = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare che ha matrice A rispetto alla base canonica.

1. Si dimostri che, qualunque siano a_2, a_3, si ha $\iota_+(\varphi) \geq 2$.

2. Si determini, al variare di (a_2, a_3), la segnatura del prodotto φ.

3. Sia ora $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ (rispetto a φ) e supponiamo che $\mu_i = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0, \ i = 1, 2, 3$. Dimostrare che l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinata da

$$f(\underline{v}_1) = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\ \underline{v}_2, \quad f(\underline{v}_2) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}}\ \underline{v}_3, \quad f(\underline{v}_3) = \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}}\ \underline{v}_1.$$

è ortogonale (rispetto al prodotto φ).