Compito di Geometria I - 22/4/2016

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Per ogni quesito spuntare una (sola) casella o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1)

a) Siano $P \equiv (-1, 0, -1)$, $Q \equiv (2, 0, 2)$, $R \equiv (0, 1, 0)$ punti in $\mathbb{R}^3$. L'equazione cartesiana del piano passante per P, Q, R è:

....

b) L'equazione cartesiana del piano passante per l'asse x e ortogonale al piano del punto precedente è:

....

2) Indicare la dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali di $V = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (si indica con $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$).

- $\{A \in V : \ A\underline{e}_1 = \underline{0}\}$ $\quad$ *dim* = ...
- $\{A \in V : \ \exists \alpha \in \mathbb{R}$ *tale che* $A\underline{e}_1 = \alpha\underline{e}_2\}$ $\quad$ *dim* = ...
- $\{A \in V : \ \exists \alpha \in \mathbb{R}$ *tale che* $A\underline{e}_1 = \alpha\underline{e}_2, A\underline{e}_2 = \alpha\underline{e}_3, A\underline{e}_3 = \alpha\underline{e}_1$ for $\}$ *dim* = ...
- Sia A come nel punto precedente, con $\alpha \neq 0$. Scrivere gli autovalori di A:

....

e dire se A è diagonalizzabile:

su $\mathbb{R}$: $\quad$ *si* ☐ *no* ☐

su $\mathbb{C}$: $\quad$ *si* ☐ *no* ☐

3)

Scrivere la segnatura della seguente matrice simmetrica: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$i_+ =$ .... $i_- =$ .... $i_0 =$ ....

Completare la seguente matrice a una matrice indefinita $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 1 \\ \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Risolvere su un foglio

Esercizio 1. Sia $V := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e sia $f : V \to V$ dato da

$$f(X) \ = \ X - {}^tX$$

1. Calcolare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica (data dalle matrici $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$).
2. Calcolare una base di $ker(f)$ e una di $Im(f)$.
3. Dire (giustificandolo) se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di autovettori.
4. Dimostrare che il prodotto scalare

$$\varphi(X, Y) = tr({}^tXY)$$

è definito positivo su V e che f è un operatore simmetrico rispetto a φ.