I compitino Geometria 12/12/2017

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Parte I [circa 11 punti] *(per ogni quesito riempire col risultato o barrare la casella. Ogni risposta errata vale -1)*

1. Dati i 4 punti in $\mathbb{R}^3$ di coordinate cartesiane ortogonali

   $$A \equiv (1,0,-1),\ B \equiv (0,1,-1)\ C \equiv (-1,1,0),\ D \equiv (1,2,3)$$

   Determinare le equazioni cartesiane dei piani Π passante per A, B, C e Π' passante per A, B, D

   Π : ....

   Π' : ....

   Scrivere un'equazione parametrica della retta r passante per il punto di mezzo E di AB e parallela alla retta passante per i punti C, D.

   $$r : \begin{cases} \text{x=} \\ \text{y=} \\ \text{z=} \end{cases}$$

   Determinare l'area del triangolo E, C, D.

   $$Area(E,C,D) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Indicare la dimensione di ciascuno dei seguenti spazi vettoriali (il campo su cui lo spazio è definito, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, è indicato caso per caso)

   (a) $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) :\ A\underline{x} = \underline{0},\quad \underline{x} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$ (su $\mathbb{R}$);

   $dim_{\mathbb{R}}(V_1) = \ldots\ldots$

   (b) $V_2 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) :\ A = i \cdot ({}^t\overline{A})\}$ (su $\mathbb{R}$);

   $dim_{\mathbb{R}}(V_2) = \ldots\ldots$

   (ricordiamo: per ogni matrice complessa A, la matrice coniugata $\overline{A}$ è la matrice ottenuta coniugando tutti gli elementi di A)

   (c) $V_3 = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2) :\ (0,0,1) \in ker(f)\}$ (su $\mathbb{C}$);

   $dim_{\mathbb{C}}(V_3) = \ldots\ldots$

3. Scrivere tutte le soluzioni complesse dell'equazione: $\overline{z} = z^2$

   ....

Parte II (scrivere su un foglio)

Esercizio 1 [circa 11 punti] Sia $V_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + (k-2)y - kt = 0 \\ x - y + (1-k)z - t = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base per V_k.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia

$$W_k = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) : \; ker(f) \supset V_k, \; Im(f) \subset V_k \; \}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di W_k.
(riportare il procedimento usato per dedurre tale dimensione).

(c) [facoltativo] Determinare la dimensione di $W_0 \cap W_k, \; k \neq 0$.

Esercizio 2 [circa ... punti] Sia $V = \mathbb{R}^3$, siano $\underline{v}_1, \; \underline{v}_2, \; \underline{v}_3 \in V$ vettori linearmente indipendenti e siano $r_i = Span(\underline{v}_i)$ i sottospazi di dimensione 1 generati.

(a) Calcolare la dimensione del sottospazio di $L(V)$ dato da

$$\mathcal{F} = \; \{ f \in L(V) : \; f(r_i) \subset r_i \},$$

descrivendone una base.

(b) Sia $\underline{v} \in V$ un altro vettore tale che $\underline{v}$ non sia combinazione di nessuna coppia $\underline{v}_i, \; \underline{v}_j$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ e sia $r = Span(\{\underline{v}\})$. Dimostrare che

$$dim \; F' = \{ f \in \mathcal{F} : \; f(r) \subset r \} \; = \; 1$$

(c) [facoltativo] Al variare di W sottospazio di dimensione 2 di V, dire (giustificandolo) quanto vale

$$dim \; F'' = \{ f \in \mathcal{F} : \; f(W) \subset W \}$$

descrivendone una base.