Compito di Geometria I - 19/6/2017

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Regolamento:
- chi recupera il primo compitino ha a disposizione 1 ora e 30 minuti e deve fare: della I parte l'esercizio 1), della II parte l'esercizio 1 e il punto 1 dell'esercizio 2.
- chi recupera il secondo compitino ha a disposizione 2 ore e deve fare: della I parte gli esercizi 2 e 3, della II parte i punti 2 e 3 dell'esercizio 2 e l'esercizio 3.

I parte

Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Dati i punti $P_1 \equiv (2,1,-1)$, $P_2 \equiv (1,-1,0)$, $P_3 \equiv (1,2,1)$, $P_4 \equiv (0,0,-1)$,

1. scrivere l'equazione cartesiana del piano Π passante per P_1, P_2 e P_3

   Π : ....

2. scrivere l'equazione parametrica della retta r passante per P_4 e per il baricentro del triangolo P_1, P_2, P_3

   r :

3. calcolare il coseno dell'angolo formato dalla retta r e dalla normale al piano Π.

   $cos =$ ....

2) Dare un esempio di una matrice di ordine 3 con polinomio minimo di grado uguale a quello del polinomio caratteristico

$A =$ $\quad$ *pol car* $=$ $\quad$ *pol min* $=$

e un esempio di una matrice di ordine 3 con polinomio minimo di grado minore di quello del polinomio caratteristico

$A =$ $\quad$ *pol car* $=$ $\quad$ *pol min* $=$

è possibile in quest'ultimo caso che A sia non diagonalizzabile? | si | no |

3) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Scrivere la segnatura del prodotto scalare φ_A di $\mathbb{R}^3$ canonicamente associato ad A :

$$\sigma(A) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Ci sono vettori isotropi? | si | no |; se sì, scriverne uno: $\underline{v} =$ ....

3. Scrivere una base dell'ortogonale rispetto a φ_A di $Span((1,1,1))$

   ....

II parte

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano

$$U = \begin{cases} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

e

$$W_t = \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ tx_1 + (2-t)x_2 + x_3 + (2t-1)x_4 &= 0 \end{cases}$$

$(t \in \mathbb{R})$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ sia

$$\mathcal{F}_t = \{f \in \mathcal{L}(V) : \ f(U) \subset U, \ f(W_t) \subset (W_t)\}.$$

1. Calcolare $dim(U \cap W_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
2. Calcolare $dim(\mathcal{F}_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ e, per ogni $A \in V$, sia $W_A := Span\{A, A^2\}$.

1. Sia $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1+i \end{bmatrix}$. Dimostrare che la matrice identità $I \notin W_{A_0}$.
2. In generale, dimostrare che $I \in W_A$ se e solo se A è invertibile.
3. Sia $F : V \to V$ l'endomorfismo

$$F(X) := A_0 X.$$

   Calcolare una base del $ker(F)$ e dire se F risulta diagonalizzabile, in caso positivo trovandone una base di autovettori.

Esercizio 3. Per ogni matrice quadrata M indichiamo con $\Sigma(M)$ la somma degli elementi di M. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia V lo spazio delle matrici reali antisimmetriche di ordine 3:

$$V := \{X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, X = -{}^tX\}.$$

Si consideri l'applicazione $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(X, Y) = \Sigma(XAY).$$

(i) Mostrare che φ è un prodotto scalare.

(ii) Determinare la segnatura di φ.

(iii) Sia U il sottospazio di V generato da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se U è in somma diretta con il suo ortogonale $U^\perp$ rispetto a φ e se la restrizione di φ a $U^\perp$ è definita positiva.