Compito di Geometria I - 11/7/2017

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Regolamento:
- chi recupera il primo compitino ha a disposizione 1 ora e 30 minuti e deve fare: della I parte gli esercizi 1) e 2), della II parte l'esercizio 1.
- chi recupera il secondo compitino ha a disposizione 2 ore e deve fare: della I parte gli esercizi 3 e 4, della II parte gli esercizi 2 e 3.
- chi fa tutto deve fare tutta la prima parte e gli esercizi 2 e 3 della seconda.

I parte

Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Dati i piani $\Pi_1 : \ 2x - 3y + z = 1, \ \Pi_2 : \ y - 2z = 2,$

1. scrivere l'equazione parametrica della retta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$

   $r :$

2. Presi comunque un punto $P_1 \in \Pi_1 \setminus r$ e un punto $P_2 \in \Pi_2 \setminus r$ la retta s passante per P_1 e P_2 risulta sghemba alla retta r.

vero	falso

2) Le matrici hermitiane (cioè tali che $A = A^*$) formano un sottospazio vettoriale complesso di $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

si, di dimensione	no

Formano un sottospazio reale di $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (visto come spazio vettoriale sui reali)?

si, di dimensione	no

3) Dare un esempio di una matrice di ordine 2 a coefficienti reali che non sia triangolarizzabile su $\mathbb{R}$:

$$A =$$

Scrivere nel riquadro se una tale matrice è per forza diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ oppure no, fornendo una breve giustificazione

.

4) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Scrivere la segnatura del prodotto scalare φ_A di $\mathbb{R}^3$ canonicamente associato ad A :

   $\sigma(A) =$ ....

2. Ci sono vettori isotropi? $\boxed{\text{si}}\boxed{\text{no}}$; se sì, scriverne uno: $\underline{v} =$ ....

3. Scrivere una base dell'ortogonale rispetto a φ_A di $Span((1,1,1))$

   ....

II parte

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $\sigma : V \to V$ la riflessione ortogonale (per il prodotto scalare canonico) rispetto al piano $x + y = 0$.

1. Scrivere la matrice associata a σ rispetto alla base canonica di V.
2. Sia $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(V) : \ f \circ \sigma = \sigma \circ f\}$. Calcolare la dimensione di $\mathcal{F}$.

Esercizio 2. Per ogni intero $n \geq 1$, sia $V_n := \mathbb{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado $\leq n$. Sia $f_{\alpha,\beta} : V_n \to V_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo dato da

$$f_{\alpha,\beta}(p(x)) \ = \ (\alpha x + \beta)\frac{d}{dx}(p(x)).$$

1. Per $n = 3$, dire per quali α, β l'endomorfismo $f_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile, e in caso positivo determinarne una base di autovettori.
2. Per qualunque n dato, dire per quali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i due endomorfismi $f_{\alpha,\beta}, f_{\gamma,\delta}$ commutano. In tal caso, se sono diagonalizzabili, determinare una base comune di autovettori.

Esercizio 3. Per ogni intero $n \geq 1$, sia $V_n := \mathbb{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado $\leq n$. Si consideri il prodotto scalare $\varphi_n : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ definito da

$$\varphi_n(p, q) := \int_0^1 p(x)q(x)dx - \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx.$$

(i) Determinare la segnatura di φ_n per $n = 2, 3$.

(ii) Si indichi con P_n il sottospazio di V_n costituito dai polinomi che sono somma di monomi di grado pari e con D_n il sottospazio dei polinomi che sono somma di monomi di grado dispari. Dimostrare che P_n e D_n sono sottospazi isotropi rispetto a φ_n.

(iii) Sia n dispari. Calcolare il sottospazio $P_n^{\perp}$ ortogonale a P_n.