04/03/2019 - *II compitino Geometria (corso A)*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

Parte I. *Per ogni quesito riempire col risultato o barrare la casella dove richiesto.*

1. Esistono due matrici non simili che hanno lo stesso polinomio caratteristico? Se si, esibire un esempio di dimensione minima possibile.

   . . . .

2. Sia $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Per $k = 1$, trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A_k.

   . . . .

   Scrivere i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

   . . . .

3. Data la matrice A_k del punto precedente, sia $f_k : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'endomorfismo definito da $f_k(X) = A_k\, X$. Per $k = 3$ e $k = 2$ indicare gli autovalori di f_k con le loro relative molteplicità algebriche e geometriche.

   Se $k = 3$: . . . .

   Se $k = 2$: . . . .

4. Sia V uno spazio vettoriale che si decompone come $V = U \oplus W$, per due sottospazi U e W. Sia f un endomorfismo di V rispetto al quale U e W sono invarianti. Siano poi p_u e p_w i polinomi caratteristici delle restrizioni di f ad U e W, rispettivamente. Se A è una qualsiasi matrice associata a f, è sempre vero che $p_u(A) \cdot p_w(A) = 0$?

   ☐ No ; controesempio (di dimensione minima):

   ☐ Sì ; perchè ....

5. Esiste una matrice reale 3×3 con polinomio minimo dato da $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$?

   ☐ No ; perchè ....

   ☐ Sì ; esempio (di dim minima):

6. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 e sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonica di V.

   a) Consideriamo l'applicazione lineare $d : V \to V$ data dalla derivata (cioè $d(p(x)) = p'(x)$). Scrivere la matrice di d in base $\mathcal{B}$:

   b) Determinare il polinomio caratteristico di d: ....

   c) L'applicazione lineare d è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No

Parte II *(Scrivere su un foglio)*

Esercizio . Sia $V_k = \mathbb{R}_k[x]$ e, per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia $T = T_{\alpha,\beta} : V_n \to V_n$ l'endomorfismo definito da

$$T(p(x)) = p(\alpha x + \beta).$$

1. Per $k = 3$: scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica di V_n.
2. Per $k = 3$: discutere la diagonalizzabilità di T al variare di α e β.
3. Per ogni $k \geq 1$: dimostrare che se $\alpha = -1$ si ha $T^2 = id$.
4. Dimostrare che un endomorfismo f di uno spazio vettoriale reale tale che $f^2 = id$ risulta sempre diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).
5. [facoltativo] Definiamo lo stesso endomorfismo T sullo spazio $V_k = \mathbb{C}_k[x]$, per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dimostrare che se $\alpha^n = 1$ allora $T^n = 1$ e T è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.