08/04/2020 - *Secondo (e ultimo) Compitino Geometria (corso A)*

Parte I. *Per ogni quesito riempire con il risultato la pagina adibita a ricevere le risposte. Indicare con precisione a quale domanda si riferisce la risposta.*

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e consideriamo l'endomorfismo f_A di $\mathbb{R}^4$ definito da $f_A(x) = A\,x$.

   a) Calcolare gli autovalori di f_A, riempiendo dove serve la seguente tabella:

Autovalore	Molteplicità algebrica	Molteplicità geometrica

   b) Indicare per quali valori di $k = \ldots\ldots\ldots\ldots$ la matrice

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   risulta simile ad A.

2. A meno di similitudine, scrivere qui (a) .... quante sono le matrici reali 3×3 con polinomio minimo $x^2 - 3x + 2$. Giustificare la risposta qui sotto:

   (b) ....

3. Sia A una matrice reale 3×3 con polinomio minimo $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

   a) Dire se A risulta invertibile, ed in tale caso esprimere A^{-1} come combinazione lineare di Id, A, A^2:

   ....

   b) Dare un esempio di $A = \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... \end{pmatrix}$

4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione tale che $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\-11\\10\end{pmatrix}$ e $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

   a) Determinare l'immagine tramite T del vettore $\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}.....\\.....\\.....\end{pmatrix}$

   b) Determinare un vettore a coefficienti interi che generi l'asse di rotazione di T: $\begin{pmatrix}.....\\.....\\.....\end{pmatrix}$

5. Consideriamo il prodotto scalare ϕ di $\mathbb{R}^4$ che in base canonica ha matrice

$$\mathrm{M}_{\mathrm{can}}(\phi) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

   a) Calcolare la segnatura di ϕ : ....

   b) Descrivere un sottospazio isotropo di $\mathbb{R}^4$ di dimensione massima: ....

6. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ tale che $f(1,1) = (i,i)$ e $f(1,0) = (-1,0)$. Dire, giustificando la risposta, se f risulta unitario rispetto al prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^2$.

   ....

7. Trovare una matrice unitaria $U = \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}$ tale che $U^{-1}\,A\,U$ sia diagonale, quando $A = \begin{pmatrix}0 & 3\\-3 & 0\end{pmatrix}$.

Parte II. *Giustificare la risposta in un foglio: dopo aver scritto la soluzione in maniera ordinata su un foglio (uno o al massimo due immagini perché l'esercizio ammette soluzione molto breve) usare nella colonna a sinistra l'opzione "scan solution" e inserirla seguendo le istruzioni con un telefono cellulare. L'immagine viene aggiunta al testo. Chi non avesse un computer o un telefono cellulare ce lo comunichi.*

Esercizio. Sia V, φ uno spazio euclideo (ricordiamo: V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare definito positivo). Sia f un endomorfismo simmetrico di V. Sia inoltre $\varphi_f : V \times V \to \mathbb{R}$ definito da $\varphi_f(v, w) = \varphi(f(v), w),\ v, w \in V$.

1. Dimostrare che $\varphi_f(w, v) = \varphi_f(v, w)$ per ogni $v, w \in V$ (e quindi φ_f è un prodotto scalare, essendo la bilinearità ovvia).

2. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V rispetto a φ. Dimostrare che la matrice associata al prodotto φ_f rispetto a $\mathcal{B}$ coincide con la matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$, cioè: $M_{\mathcal{B}}(\varphi_f) = M_{\mathcal{B}}(f)$.

3. Dimostrare che

   $$\begin{array}{lcl} \iota_+(\varphi_f) & = & \sum_{\lambda>0} \mu_g(\lambda) \\ \iota_-(\varphi_f) & = & \sum_{\lambda<0} \mu_g(\lambda) \\ \iota_0(\varphi_f) & = & dim(Ker(f)). \end{array}$$

   dove le somme sono fatte sugli autovalori di f (nel primo caso quelli positivi, nel secondo caso quelli negativi).

4. Sia $\psi : V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare. Dimostrare che esiste un unico endomorfismo simmetrico f tale che $\psi = \varphi_f$.